ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ENSEA - ABIDJAN	ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE ENSAE - DAKAR	INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes et ln le logarithme népérien. On rappelle les relations

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{1+\cos\theta}{2} \\ \sin\theta &= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

valables pour tout réel θ.

On rappelle enfin la limite classique :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos^2 x(\sin x)dx$.

   En posant $u = \cos x$, il vient $u' = -\sin x$ et

$$\begin{aligned}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos^2 x(\sin x)dx &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -u^2 du \\ &= \left[-\frac{u^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{12}.\end{aligned}$$

2. Exprimer la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x^3}{\cos x}$ comme une fonction de $\sin x$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{3\sin^2 x \cos^2 x + \sin^3 x \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{3\sin^2 x(1-\sin^2 x) + \sin^4 x}{1-\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin^2 x(3 - 2\sin^2 x)}{1-\sin^2 x}\end{aligned}$$

3. Donner la limite en $-\infty$ de la fonction $f(x) = \sqrt{2x^2+x+1} + x$.
Tout d'abord, $2x^2 + x + 1 > 0$ pour tout réel x. De plus,

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2+x+1} + x &= |x|\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x \\ &= x\left(1 - \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)\end{aligned}$$

dès que $x < 0$. Par passage à la limite, comme $1 - \sqrt{2} < 0$, on a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

4. Donner le comportement au voisinage de $x = 0$ de la fonction $f(x) = \sin x \ln(x - x^2)$.
Pour $0 < x < 1$, on a

$$f(x) = \sin x \ln(x) + \sin x \ln(1-x).$$

Le second terme du membre de droite tend vers 0, et pour le premier on a

$$\sin x \ln(x) = \frac{\sin x}{x} x \ln x.$$

$\sin x/x$ tend vers 1 quand $x \to 0$, et par croissance comparée $x \ln x$ tend vers 0, donc finalement la limite recherchée vaut 0.

5. Ecrire le nombre complexe $z = -3 + 3i$ sous forme trigonométrique.

$$z = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

6. Si on vous demande d'étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \frac{2x}{e^x - e^{-x}},$$

expliquer quel intervalle d'étude vous choisissez, et comment vous étendez vos résultats à l'ensemble du domaine de définition de f.

On remarque que f est une fonction paire définie sur $\mathbf{R}$ privé de l'origine. On peut donc faire l'étude de f sur $]0, +\infty[$ et on complète par symétrie par rapport à l'axe d'équation $x = 0$.

7. Une urne contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2. On tire au hasard uniforme et avec remise deux fois une boule, et on fait le produit X des chiffres obtenus. Pour toute valeur de k pertinente, donner la probabilité pour que X soit égal à k et en déduire l'espérance de X.

X prend la valeur 1 si la boule numérotée 1 est tirée 2 fois, c'est-à-dire avec probabilité 1/9. De même, X prend la valeur 4 si la boule numérotée 2 est tirée 2 fois, donc là aussi avec probabilité 1/9. X vaut 2 si on a tiré soit 1 puis 2, soit 2 puis 1, donc avec probabilité 2/9. Dans tous les autres cas, c'est-à-dire avec probabilité $1 - 1/9 - 1/9 - 2/9 = 5/9$, X vaut 0. L'espérance de X est donc égale à $0 \times 5/9 + 1 \times 1/9 + 2 \times 2/9 + 4 \times 1/9 = 1$.

8. On considère la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + 4)$. Cette suite est-elle monotone ? Est-elle convergente ?

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n^2 - 2u_n + 4).$$

Cette expression est de signe constamment positif car l'équation $x^2 - 2x + 4 = 0$ n'admet pas de racine réelle. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est donc croissante. Si elle convergeait, sa limite vérifierait $l^2 - 2l + 4 = 0$ or on vient de voir que c'était impossible : la suite diverge donc vers $+\infty$.

9. En utilisant la double inégalité (qu'on ne cherchera pas à démontrer)

$$\frac{n}{\sqrt{n^4 + n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}}$$

valable pour tout entier $n > 0$ et pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, étudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}}.$$

D'après la double inégalité de l'énoncé, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}}$$

soit

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4 + n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}} \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + 1}}$$

ou encore

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}$$

et d'après le théorème de comparaison, la suite de terme général u_n converge vers 1.

10. Résoudre l'equation $x^3 + 6x^2 - x = 0$ dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.
On a soit x=0, soit $x^2 + 6x^2 - 1 = 0$, équation qui admet les racines réelles $-3-\sqrt{10}$ et $-3+\sqrt{10}$. Les racines complexes sont les mêmes que les racines réelles.

Exercice 2 Pour $a \in \mathbf{R}$, on considère la fonction de la variable réelle

$$f_a(x) = ax^3 - 3(a+1)x^2 + x + 1$$

1. Dans cette partie, on pose $a = -1/3$ et pour simplifier on note $f_{-\frac{1}{3}} = f$.

(a) Calculer f', et en déduire les intervalles de croissance de f.
On a donc

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 1$$

d'où

$$f'(x) = -x^2 - 4x + 1$$

qui s'annule en $x_1 = -2-\sqrt{5}$ et $x_2 = -2+\sqrt{5}$, et est de signe négatif au voisinage de l'infini. Par suite, f est décroissante sur $]-\infty, x_1[$ et $]x_2, +\infty[$, et croissante sur $]x_1, x_2[$.

(b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que la valeur de $f(-2)$.
Il vient immédiatement que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $f(-2) = -19/3$.

(c) Déduire des questions précédentes que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement 3 solutions qu'on placera par rapport aux valeurs -2, -1 et 0.
f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, x_1[$ avec $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, puis strictement croissante sur $]x_1, x_2[$. Comme $x_1 < -2 < x_2$, on en déduit que $f(x_1) < 0$, puis d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe une unique solution z_1 à l'équation $f(x) = 0$ sur $]-\infty, x_1[$, avec donc $z_1 < -2$.
On a par ailleurs $x_1 < -1 < 0 < x_2$, donc comme $f(-1) = -5/3 < 0$ et$f(0) = 1$, en reproduisant le raisonnement précédent on montre l'existence d'une unique solution z_2 sur $]x_1, x_2[$, avec $-1 < z_2 < 0$.
Enfin, comme $f(x_2) > f(0) = 1 > 0$, il existe de même une unique solution z_3 sur $]x_2, +\infty[$, et on a donc $z_3 > 0$.

(d) Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe représentative.
Ils se déduisent des questions précédentes.

2. On suppose désormais a quelconque.

(a) Pour un point (x, y) tel que $x \neq \{0, 3\}$, montrer qu'il existe une unique valeur de a telle que $f_a(x) = y$ et donner la valeur de a.
$f_a(x) = y$ ssi $ax^3 - 3(a+1)x^2 + x + 1 = y$ ssi $a(x^3 - 3x^2) = y + 3x^2 - x - 1$. Par suite, si $x \neq \{0, 3\}$, la solution unique a vaut

$$a = \frac{y + 3x^2 - x - 1}{x^2(x-3)}.$$

(b) Pour y fixé, résoudre en a l'équation $f_a(3) = y$.

On remarque que $f_a(3) = -23$ pour tout a. Par suite l'équation considérée n'a pas de solution si $y \neq -23$, et admet $\mathbf{R}$ comme ensemble de solutions si $y = -23$.

(c) Déduire de ce qui précède que toutes les courbes représentatives des fonctions f_a, $a \in \mathbf{R}$, passent par deux points M_1 et M_2 du plan dont on donnera les coordonnées.

On remarque que $f_a(0) = 1$ pour tout a, donc toutes les courbes passent par le point M_1 de coordonnées $(0,1)$. D'après la question précédente, elles passent également toutes par le point M_2 de coordonnées $(3,-23)$.

(d) Montrer que la tangente à la courbe de f_a au point d'abscisse $x = 0$ ne dépend pas de $a \in \mathbf{R}$.

$f_a'(0) = 1$, donc la tangente à la courbe de f_a au point d'abscisse $x = 0$ passe par le point de coordonnées $(0,1)$ et admet 1 comme coefficient directeur : elle ne dépend donc pas de a.

Exercice 3

On considère la fonction de la variable réelle f définie par

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{2}{x}} \qquad \text{pour } x \neq 0$$

1. Montrer que
$$\lim_{|x|\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) = 2.$$
(on pourra utiliser le rappel donné au début de l'énoncé avant l'exercice 1)

   Posons $y = 2/x$. On a alors
$$\lim_{|x|\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) = \lim_{y\to 0} \frac{2}{y}(e^y - 1) = 2$$
d'après le rappel donné au début de l'énoncé.

2. Donner le domaine de définition de f, calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition et étudier soigneusement ses éventuelles branches infinies.

   f est définie sur $\mathbf{R}$ privé de 0.

   Quand x tend vers 0 par valeurs négatives, $2/x$ tend vers $-\infty$ donc $e^{\frac{2}{x}}$ tend vers 0 et $f(x)$ également.

   Quand x tend vers 0 par valeurs positives, $2/x$ tend vers $+\infty$ donc $e^{\frac{2}{x}}$ tend vers $+\infty$ et $f(x)$ tend vers $-\infty$: on a donc ici une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

   Quand $|x|$ tend vers $+\infty$, $2/x$ tend vers 0 donc $e^{\frac{2}{x}}$ tend vers 1. Par suite $f(x)$ tend vers $+\infty$ si $x \to +\infty$ et $f(x)$ tend vers $-\infty$ si $x \to -\infty$. On a donc deux branches infinies à étudier.

   Il est clair que $f(x)/x$ tend vers 1 quand $|x|$ tend vers $+\infty$. On a alors
$$f(x) - x = x\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) - e^{\frac{2}{x}}.$$

D'après la première question, $x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$ tend vers 2 quand $|x|$ tend vers $+\infty$, et on a vu également que $e^{\frac{2}{x}}$ tend vers 1. Par suite $f(x)-x$ tend vers 1 quand $|x|$ tend vers $+\infty$, et on a donc une unique asymptoque oblique d'équation $y=x+1$.

3. Calculer la dérivée et dresser le tableau de variations de f.
   Un calcul standard montre que la dérivée de f vaut
$$f'(x)=\frac{x^2-2x+2}{x^2}e^{\frac{2}{x}}>0.$$
   f est donc croissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. Le tableau de variation se déduit alors des résultats précédents.
4. Tracer la courbe représentative de f.
   Elle se déduit également des résultats précédents, en remarquant que, par comparaison des fonctions puissances et exponentielles, la limite de f' à gauche de 0 est nulle.
5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, si $t>1$,
$$\int_1^t xe^{\frac{2}{x}}dx=\frac{t^2e^{\frac{2}{t}}-e^2}{2}+\int_1^t e^{\frac{2}{x}}dx.$$
   On pose $u'(x)=x$ et $u(x)=x^2/2$ d'une part, $v(x)=e^{\frac{2}{x}}$ et $v'(x)=-2e^{\frac{2}{x}}/x^2$ d'autre part, la formule d'intégration par parties donne
$$\int_1^t xe^{\frac{2}{x}}dx=\left[\frac{x^2}{2}e^{\frac{2}{x}}\right]_1^t-\int_1^t\frac{x^2}{2}\frac{-2}{x^2}e^{\frac{2}{x}}dx$$
   d'où le résultat demandé.
6. En déduire l'ensemble des primitives de f.
   D'après ce qui précède,
$$\int_1^t(x-1)\,e^{\frac{2}{x}}dx=\frac{t^2e^{\frac{2}{t}}-e^2}{2}.$$
   Les primitives de f sont donc de la forme $F(t)=\frac{t^2e^{\frac{2}{t}}-e^2}{2}+C$ où C est une constante réelle.
7. Calculer l'aire du domaine du plan constitué des points (x,y) vérifiant $1\le x\le 2$ et $0\le y\le f(x)$.
   En reprenant les notations ci-dessus, l'aire demandée vaut $F(2)-F(1)=\frac{4e-e^2}{2}\simeq 1,74$.

Exercice 4 On considère la suite $(I_n)_{n\ge 0}$ définie par
$$I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx.$$

1. Calculer I_0 et montrer que $I_1=\ln 2-1/2$.
$$I_0=\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x+1-1}{1+x}dx=1-\int_0^1\frac{dx}{1+x}=1-\ln 2$$
   et
$$I_1=\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x^2-1}{1+x}dx+\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\int_0^1(x-1)dx+\ln 2$$
   d'où le résultat demandé.

2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$,
$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+2}.$$
I_n est l'intégrale d'une fonction positive entre 0 et 1, donc elle est positive. L'inégalité de droite découle du fait que $x+1 \geq 1$ pour $x \in [0,1]$.

3. Pour x réel différent de -1 et n entier naturel non nul, montrer que
$$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n - \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{1+x}.$$
Le début du terme de gauche est la somme des $n+1$ premiers termes d'une progression géométrique de premier terme 1 et de raison $-x$: elle vaut donc $(1-(-1)^{n+1}x^{n+1})/1+x$. Le résultat demandé s'obtient alors immédiatement.

4. On pose
$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$
Déduire de la question précédente que
$$I_n = (-1)^n (S_n - \ln 2).$$
En intégrant l'égalité précédente entre 0 et 1, il vient :
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \ln 2 = (-1)^{n+2} I_n.$$
Le résultat demandé s'obtient en multipliant les deux membres de cette équation par $(-1)^n$, et en remarquant que $(-1)^{2n-2} = 1$.

5. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$.
I_n tend vers 0 d'après la question 2., donc S_n tend vers $\ln 2$ quand $n \to \infty$.

Exercice 5

1. On se propose de montrer par récurrence la proposition
$\mathcal{P}_n$: *Si n nombres réels strictement positifs $a_1, a_2, \cdots, a_n$ vérifient $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, alors $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$.*
Pour ce faire, on suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour un certain $n \geq 1$, et on considère $n+1$ nombres réels strictement positifs $a_1, \cdots, a_{n+1}$ vérifiant $a_1 a_2 \cdots a_{n+1} = 1$. On supposera les a_i rangés par ordre croissant, c'est-à-dire $a_1 \leq \cdots \leq a_n$.
   (a) Montrer que $a_1 \leq 1$ et $a_{n+1} \geq 1$.
   Si $a_1 > 1$, alors tous les termes de la suite sont plus grands que 1 (puisqu'on les a rangés par ordre croissant), et donc leur produit est strictement supérieur à 1. De même, si $a_n < 1$, tous les termes de la suite sont strictement plus petits que 1, et comme ils sont tous positifs, leur produit est lui-même strictement inférieur à 1
   (b) On pose $b_1 = a_1 a_{n+1}$. Montrer que $b_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \geq n$.
   On a $b_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 1$, et comme $b_1, a_2, \cdots, a_n$ sont n nombres strictement positifs, d'après l'hypothèse $\mathcal{P}_n$, leur somme est supérieure ou égale à n, ce qui est le résultat demandé.

(c) En déduire que $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} \geq n + 1 + (a_{n+1} - 1)(1 - a_1)$.
On a donc

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} n &= b_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + a_1 - b_1 \\ &\geq n + a_{n+1} + a_1 - a_1 a_{n+1} \\ &= n + 1 + a_{n+1} + a_1 - a_1 a_{n+1} - 1 \\ &= n + 1 + (a_{n+1} - 1)(1 - a_1) \end{aligned}$$

ce qui est le résultat demandé.

(d) En déduire que la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée, puis conclure soigneusement.
D'après la première question, $(a_{n+1} - 1)(1 - a_1) \geq 0$, et donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée d'après l'inégalité que nous venons de montrer. Par ailleurs il est clair que $\mathcal{P}_1$ est vérifiée (si $a_1 = 1$, alors $a_1 \geq 1$) : comme nous avons montré que $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$, nous avons bien prouvé par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

2. On considère maintenant n nombres réels strictement positifs $x_1, \cdots, x_n$. Montrer que

$$(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

(on pourra poser $a_k = \dfrac{x_k}{(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}$ pour $1 \leq k \leq n$ et utiliser la question précédente).
En utilisant l'indication de l'énoncé, on s'aperçoit que le produit des a_k vaut 1, donc d'après la question précédente la somme des a_k est supérieure à n. Autrement dit,

$$\frac{x_1}{(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}} + \cdots + \frac{x_n}{(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}} \geq n$$

ou encore

$$\frac{x_1}{n} + \cdots + \frac{x_n}{n} \geq (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

d'où le résultat.

3. On considère enfin un nombre réel $x > 0$.

(a) Calculer $(1 \times x \times x^2 \cdots \times x^{2n})^{\frac{1}{2n+1}}$.
En additionnant les puissances, on trouve $0 + 1 + 2 + \cdots + 2n = n(2n+1)$ et donc le résultat demandé est x^n

(b) Montrer que

$$\frac{x^n}{1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n}} \leq \frac{1}{2n+1}$$

Le résultat provient directement de l'inégalité vue à la question précédente :

$$(1 \times x \times x^2 \cdots \times x^{2n})^{\frac{1}{2n+1}} \leq \frac{1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n}}{2n+1}$$

et du fait que $(1 \times x \times x^2 \cdots \times x^{2n})^{\frac{1}{2n+1}} = x^n$.

Exercice 6 Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des nombres complexes $z = a + ib$ tels que $a > 0$ et $b > 0$. On définit une suite $(z_n)_{n \geq 0}$ par $z_0 \in \mathcal{Q}$ et

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2} \qquad \text{pour } n \geq 0.$$

1. Montrer que $z_n \in \mathcal{Q}$ pour tout entier $n \geq 0$.

   On fait un raisonnement par récurrence : l'énoncé nous dit que $z_0 \in \mathcal{Q}$, et si $z_n \in \mathcal{Q}$, en posant $z_n = a_n + ib_n$ avec a_n et b_n positifs, on a $b_{n+1} = b_n/2 > 0$ et $a_{n+1} = (a_n + |z_n|)/2 > 0$, d'où $z_{n+1} \in \mathcal{Q}$ et le résultat.

2. En déduire qu'il existe un unique réel positif ρ_n et un unique réel $\theta_n \in]0, \pi/2[$ tels que $z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$.

   Il existe de toutes façons un unique réel positif ρ_n et un unique réel $\theta_n \in]0, 2\pi[$ tels que $z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$. Comme $z_n \in \mathcal{Q}$, $\theta_n \in]0, \pi/2[$.

3. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$,

$$\rho_{n+1} = \rho_n \cos\frac{\theta_n}{2}$$

   et

$$\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\rho_n + \rho_n\cos\theta_n + i\rho_n\sin\theta_n\right). \tag{1}$$

   Par suite,

$$\begin{aligned} \rho_{n+1}^2 &= \frac{1}{4}\left(\rho_n^2(1+\cos\theta_n)^2 + \rho_n^2\sin^2\theta_n\right) \\ &= \rho_n^2\left(\frac{2+2\cos\theta_n}{4}\right) \\ &= \rho_n^2\cos^2(\theta_n/2) \end{aligned}$$

   d'après le rappel donné au début de l'énoncé. Comme $z_n \in \mathcal{Q}$, $\cos(\theta_n/2) > 0$, on a donc $\rho_{n+1} = \rho_n\cos(\theta_n/2)$.

   En utilisant ce résultat et l'expression de z_{n+1} donnée en (1), on obtient

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\rho_n(1+\cos\theta_n) + i\rho_n\sin\theta_n\right) \\ &= \rho_n\cos^2(\theta_n/2) + i\rho_n\sin(\theta_n/2)\cos(\theta_n/2) \\ &= \rho_{n+1}(\cos(\theta_n/2) + i\sin(\theta_n/2)) \end{aligned}$$

   d'où on conclut que $\theta_{n+1} = \theta_n/2$.

4. En déduire que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite réelle $l \geq 0$.

   D'après la question précédente, la suite de terme général ρ_n est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite réelle $l \geq 0$. De plus la suite de terme général θ_n converge évidemment vers 0. Par suite z_n converge vers $l(\cos 0 + i\sin 0) = l$ d'où le résultat.

Exercice 7

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne dans laquelle on a mis n boules bleues, 5 boules rouges et 3 boules jaunes, soit $n+8$ boules en tout.

1. On tire simultanément deux boules de l'urne, et on note p_n la probabilité que ces deux boules aient la même couleur.

   (a) Donner la probabilité d'avoir sorti deux boules bleues, celle d'avoir sorti deux boules rouges et celle d'avoir sorti deux boules jaunes. En déduire la valeur de p_n

   Les boules étant tirées simultanément, il y a $(n+8)(n+7)/2$ paires possibles de boules tirées, dont n(n-1)/2 permettent de sortir 2 boules bleues. La probabilité d'avoir sorti deux boules bleues est donc de $\frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}$. De même, la probabilité d'avoir sorti deux boules rouges est $\frac{20}{(n+8)(n+7)}$ et la probabilité d'avoir sorti deux boules jaunes est $\frac{6}{(n+8)(n+7)}$.

   On en déduit que $p_n = \frac{n(n-1)+26}{(n+8)(n+7)}$.

   (b) Calculer la limite de p_n quand $n \to +\infty$. Pouvez-vous donner une explication intuitive au résultat obtenu ?

   La limite de p_n est celle des termes de rang principal dans la fraction ci-dessus, soit 1. C'est intuitif car plus n est grand, plus les boules bleues sont majoritaires dans l'urne et les chances de tirer une boule d'une autre couleur dans l'urne tendent vers 0.

2. On effectue maintenant une série de 10 tirages successifs de deux boules comme à la question précédente, en remettant les boules dans l'urne après chaque tirage. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où, lors de ces 10 tirages, on a obtenu deux boules de même couleur.

   (a) Quelle est la loi de X ?

   La loi de X est une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}$.

   (b) Calculer la probabilité r_n d'avoir obtenu exactement 9 fois deux boules de même couleur dans ces tirages.

   Par définition de la loi binomiale,

   $$r_n = 10 \times \left(\frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}\right)^9 \left(1 - \frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}\right).$$

   (c) Calculer la limite de r_n quand $n \to +\infty$. Pouvez-vous donner une explication intuitive au résultat obtenu ?

   On a toujours $0 \leq \left(\frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}\right)^9 \leq 1$, et quand $n \to +\infty$, $\left(1 - \frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}\right) \to 0$. Par suite, r_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Cela signifie que l'hégémonie des boules bleues est telle que la possibilité de tirer autre chose que systématiquement 2 boules bleues sur 10 tirages est asymptotiquement nulle.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

CORRIGÉ de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

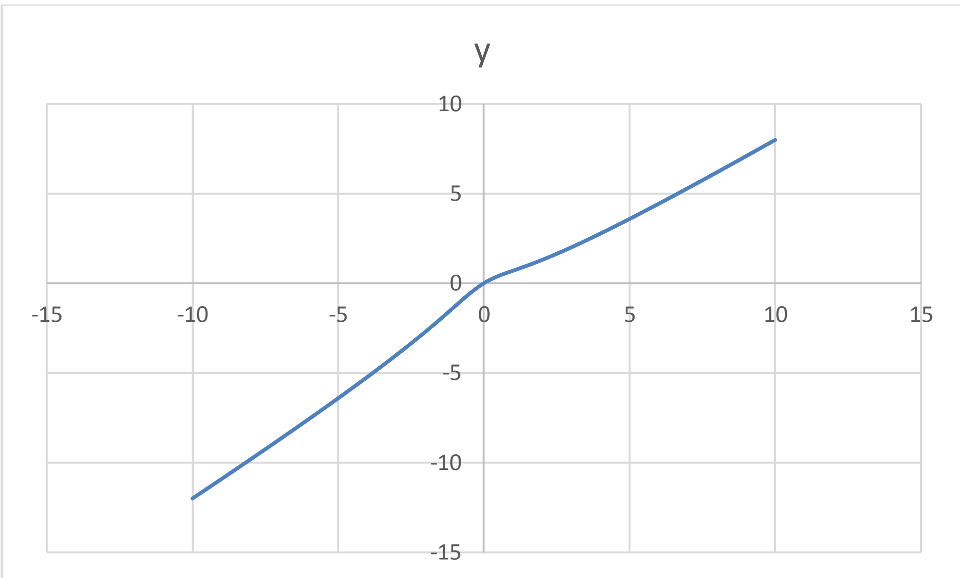
Dans toute l'épreuve, *Ln* désigne le logarithme népérien, *e* le nombre de Néper, *R* l'ensemble des nombres réels et *N* l'ensemble des entiers naturels.

Exercice n° 1

Soit l'application *f* définie sur R par : $f(x) = x - Ln(1+x^2)$

1. Etudier les variations de f (on précisera son comportement aux infinis) et donner l'allure de son graphe.

La dérivée de *f* est égale à : $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2} \geq 0$. La fonction est donc strictement croissante de *R* sur *R* avec une branche parabolique dans la direction de la première bissectrice.



2. Etudier la convexité de *f*.

La dérivée seconde est égale à : $f''(x) = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2}$. La fonction est donc convexe pour *x*<-1 et *x*>1 et par conséquent concave entre -1 et 1.

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\, dx$.

Soit $J = \int_0^1 Ln(1+x^2)\, dx$ que l'on intègre par parties, à savoir :

$$J = \left[x\, Ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 2\frac{x^2}{1+x^2}\, dx = Ln 2 - 2\left[x - Arctg\, x\right]_0^1 = Ln 2 - 2(1-\frac{\pi}{4})$$. Par conséquent :

$$I = \frac{5}{2} - Ln 2 - \frac{\pi}{2}$$

4. Etudier la suite réelle $(u_n)_{n\in N}$ définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = Ln(1+u_n^2)$ et $u_0 \neq 0$.

Si la suite converge vers une limite *l*, cette dernière est solution de l'équation : $l = Ln(1+l^2)$ ou encore $f(l) = 0$, soit l=0 ;

Par ailleurs $\forall n > 0, u_n > 0$ et $u_{n+1} - u_n = - f(u_n) < 0$. La suite est donc décroissante et minorée, et elle converge vers 0.

Exercice n° 2

Pour *n* entier supérieur ou égal à 1, on définit la fonction numérique f_n par :

$$f_n(x) = \frac{e^x}{(1+x^2)^n}$$

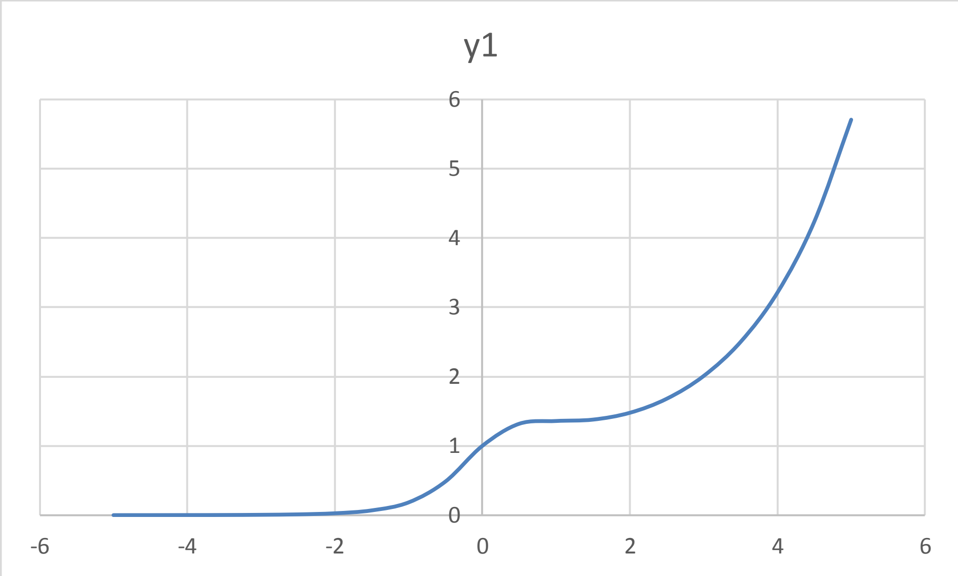
1. Etudier les variations de f_n selon les valeurs de *n* (on précisera son comportement à l'infini).

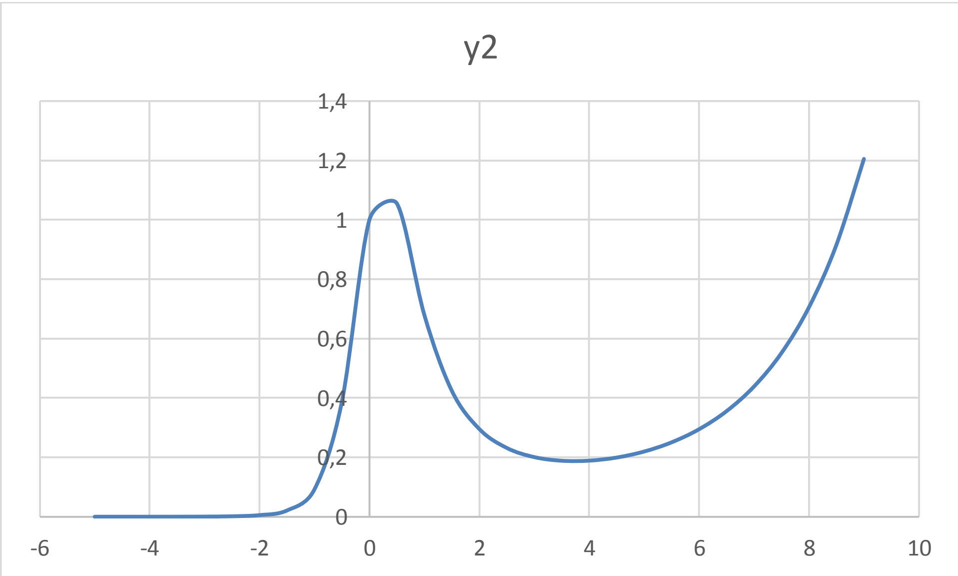
La dérivée est égale à : $f_n'(x) = \frac{e^x}{(1+x^2)^{n+1}}(x^2 - 2nx + 1)$

Si *n*=1, $f_1'(x) = \frac{e^x}{(1+x^2)^2}(x-1)^2 \geq 0$ et la fonction est strictement croissante de *R* sur R^+, avec une banche parabolique dans la direction verticale à plus l'infini et l'axe des abscisses comme asymptote à moins l'infini. Son graphe admet une tangente horizontale en 1.

Si *n*>1, la dérivée s'annule pour $x = n \pm \sqrt{n^2 - 1}$, la fonction est croissante pour $x < n - \sqrt{n^2-1}$ et $x > n + \sqrt{n^2-1}$ et décroissante entre ces deux valeurs.

2. Tracer les graphes de f_1 et f_2 .





3. Déterminer $\lim_{n\to\infty}\int_1^2 f_n(x)\,dx$.

Sur cet intervalle, on a : $0 < f_n(x) < \frac{e^2}{2^n} \to 0$, donc la limite est nulle.

Exercice n° 3

On dispose de 12 cartes retournées sur une table (on ne voit pas la couleur de ces cartes). Ce dispositif contient 3 cartes de chaque couleur (cœur, carreau, pique et trêfle).
On retourne au hasard les cartes une par une et sans remise. Le jeu s'arrête quand on a tiré 3 couleurs identiques.
1. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 cartes de la même couleur au troisième tirage ?
- Aucune contrainte sur la première carte,
- La deuxième carte doit être de la même couleur que la première, soit une probabilité de 2/11
- Pour la troisième, une probabilité égale à : 1/10

Au total, la probabilité est : $\frac{2}{11}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{55}$

2. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 cartes de la même couleur au quatrième tirage ?
- Aucune contrainte sur la première carte, notons A cette première couleur et B pour les autres couleurs.
3 possibilités pour arrêter le jeu au quatrième tirage :
AABA avec une probabilité de $\frac{2}{11}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{55}$
ABBB avec une probabilité de $\frac{9}{11}\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{55}$
ABAA avec une probabilité de $\frac{9}{11}\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{55}$
Au total, la probabilité est de 3/55

3. Quel est le nombre maximal possible de tirages pour obtenir 3 cartes de la même couleur ?
Le nombre maximal est obtenu quand on a déjà tiré deux cartes de chacune des quatre couleurs, soit donc au $9^{\text{ème}}$ tirage.

4. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 cartes de 3 couleurs différentes au troisième tirage ?
- Aucune contrainte sur la première carte,
- La deuxième carte doit être couleur différente, soit une probabilité de 9/11
- Pour la troisième, de couleur différente aux deux premières, une probabilité égale à : 6/10
Au total, la probabilité est : $\frac{9}{11}\times\frac{6}{10}=\frac{27}{55}$
5. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 cartes de 4 couleurs différentes au quatrième tirage ?

La probabilité est : $\frac{9}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{9}{55}$

Exercice n° 4

1. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in N}$ définie par la relation de récurrence : $u_{n+1}=\frac{3+u_n^2}{4}$ et $1<u_0\leq 2$. Etudier la convergence de cette suite (on précisera sa limite si elle existe).
On vérifie aisément par récurrence que : $1<u_n\leq 2$ pour tout *n*.
De plus $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-1)(u_n-3)}{4}<0$. La suite étant décroissante et minorée, elle converge vers une limite *l* solution de l'équation $l=\frac{3+l^2}{4}$ et on trouve *l*=1.

2. Soit la suite $(v_n)_{n\in N}$ définie par $v_{n+1}=v_n+Lnu_n$ et $v_0>0$. Etudier la convergence de cette suite $(v_n)_{n\in N}$.
On a $v_{n+1}-v_n=Lnu_n\geq 0$, car $1<u_n$. La suite est donc croissante. Si elle était majorée, par exemple : $v_n\leq M$, alors $v_{n+1}\leq M+Lnu_n$ et ce majorant est plus grand que *M*. La suite n'est donc pas majorée et elle tend vers plus l'infini.

3. On considère la suite réelle $(w_n)_{n\in N}$ définie par la relation de récurrence : $w_{n+1} = \dfrac{9+w_n^2}{6}$ et $w_0 = 0$. Etudier la convergence de cette suite (on précisera sa limite si elle existe).
La suite est à termes positifs et si elle converge vers une limite l alors cette limite vérifie : $l = \dfrac{9+l^2}{6}$, à savoir l=3. On vérifie par récurrence que $w_n < 3$ et que $w_{n+1} - w_n = \dfrac{(3-w_n)^2}{6} \geq 0$. La suite étant croissante et majorée, elle converge vers l=3.

Exercice n° 5

Soit la fonction f_α définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par : $f_\alpha(x) = x^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ où α est un paramètre réel strictement positif.

1. Montrer que f_α est prolongeable par continuité en zéro. On notera encore f_α la fonction ainsi prolongée en zéro.
On a : $\left| x^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq \left|x^\alpha\right| \to 0$ quand x tend vers zéro. Par conséquent, on peut prolonger par continuité en posant $f_\alpha(0) = 0$.

2. Etudier la dérivabilité de f_α sur R.
La fonction est indéfiniment dérivable (comme composée de fonctions élémentaires indéfiniment dérivables) sur R^*. Les difficultés se posent uniquement à l'origine (idem pour les deux questions suivantes).
Rappelons que les fonctions $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'ont pas de limite en zéro.
On a : $\underset{0}{Lim} \dfrac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x} = \underset{0}{Lim}\, x^{\alpha-1}\sin(\dfrac{1}{x}) = 0$ si $\alpha > 1$. La fonction est donc dérivable en zéro avec une dérivée nulle si $\alpha > 1$, sinon elle n'est pas dérivable.

3. Etudier la continuité de la fonction dérivée de f_α sur R (quand elle existe).
Il faut $\alpha > 1$.
En dehors de zéro, la dérivée est : $f_\alpha^{'}(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}\sin(\dfrac{1}{x}) - x^{\alpha-2}\cos(\dfrac{1}{x})$.
Cette dérivée tend vers zéro pour $\alpha > 2$ et elle est donc continue en zéro. Sinon la fonction dérivée n'est pas continue.

4. La fonction f_α est-elle deux fois continument dérivable en zéro ?
Cherchons d'abord la dérivée seconde en zéro :
$$\underset{0}{Lim} \frac{f_\alpha^{'}(x) - f_\alpha^{'}(0)}{x} = \underset{0}{Lim}\, \alpha\, x^{\alpha-2}\sin(\frac{1}{x}) - x^{\alpha-3}\cos(\frac{1}{x}) = 0 = f_\alpha^{''}(0) \text{ si } \alpha > 3$$
Puis pour $x \neq 0$,
$$f_\alpha^{''}(x) = \alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}\sin(\frac{1}{x}) - \alpha\, x^{\alpha-3}\cos(\frac{1}{x}) - (\alpha-2)\,x^{\alpha-3}\cos(\frac{1}{x}) + x^{\alpha-4}\sin(\frac{1}{x})$$

On a : $\underset{0}{Lim}\, f_\alpha^{"}(x) = 0 = f_\alpha^{"}(0)$ si $\alpha > 4$.

En conclusion la fonction est de deux fois continument dérivables ssi $\alpha > 4$

5. Résoudre l'équation $f_\alpha(x) = 0$. On obtient $x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{k\pi}$.

Exercice n° 6

Soit la fonction *f* définie sur *R* par : $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0, f(x) = \dfrac{e^{(x^2)} - 1}{x}$

1. Montrer que *f* admet une application réciproque, notée f^{-1}, définie sur *R*.

On va montrer que *f* est continue et strictement croissante, donc bijective et elle admet alors une application réciproque. On rappelle que $e^u \approx 1 + u + \dfrac{u^2}{2}$ au voisinage de 0.

- La fonction est continue $\forall x \neq 0$ et en zéro : $\underset{0}{Lim}\ f(x) = \underset{0}{Lim} \dfrac{x^2}{x} = 0 = f(0)$

- Dérivabilité de *f* en zéro :

$\underset{0}{Lim} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \underset{0}{Lim} \dfrac{f(x)}{x} = \underset{0}{Lim} \dfrac{e^{(x^2)} - 1}{x^2} = 1 = f'(0)$ et la fonction dérivée est aussi continue.

- Monotonie de *f* :

On a : $f'(x) = \dfrac{(2x^2 - 1)e^{(x^2)} + 1}{x^2}$ ou encore $x^2 f'(x) e^{-x^2} = (2x^2 - 1) + e^{-(x^2)}$

En remplaçant x^2 par *u*, soit $g(u) = (2u - 1) + e^{-u}$ pour $u \geq 0$. Le signe de la dérivée de *f* est le même que celui de *g*. On a : $g'(u) = 2 - e^{-u} > 0$, la fonction *g* est donc croissante et comme *g(0)*=0, on a : $\forall u \geq 0,\ g(u) \geq 0$

La fonction *f* est donc strictement croissante et bijective.

2. Donner un développement limité de f^{-1}, à l'ordre 5, au voisinage de zéro.

Le développement limité de *f* au voisinage de 0 est :

$$f(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + o(x^5)$$

f^{-1} étant impaire (comme *f*), son développement limité sera de la forme :

$$f^{-1}(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)$$

On doit avoir :

$$x = f^{-1} o\, f(x) = a_1 (x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6}) + a_3 (x + \frac{x^3}{2})^3 + a_5 x^5 + o(x^5)$$

$x = a_1\, x + (\dfrac{a_1}{2} + a_3) x^3 + (\dfrac{a_1}{6} + \dfrac{3a_3}{2} + a_5) x^5 + o(x^5)$ et par identification, on obtient :

$a_1 = 1; a_3 = -\dfrac{1}{2};\ a_5 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{12}$. Par conséquent :

$$f^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{7}{12} x^5 + o(x^5)$$