ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

Juin 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

CORRIGÉ de la 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1 :

On définit sur R_+^* l'application f_a qui à tout x réel strictement positif associe $f_a(x) = x^a e^{-x}$ où a est un paramètre réel.

1) Etudier les variations des fonctions f_0, f_2 et f_{-2} (dérivée première, dérivée seconde, limites, asymptotes éventuelles, tableau de variations, …).
Donner la forme des graphes C_2 et C_{-2} des courbes représentatives de f_2 et f_{-2}. Etudier l'intersection des graphes C_2 et C_{-2}.

$f_0(x) = e^{-x}$; $f'_0(x) = - e^{-x} < 0$; la fonction est monotone décroissante, avec $\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = 0$ et $\lim_{x\to0} f_0(x) = 1$. La pente en (0, 1) est -1.

$f_2(x) = x^2e^{-x}$; $f'_2(x) = xe^{-x}(2 – x)$; $f''_2(x) = (x^2 – 4x + 2)e^{-x}$.
La fonction est croissante sur (0 ; 2), puis décroissante sur (2 ; + ∞). On a $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = 0$ et $\lim_{x\to0} f_0(x) = 0$.
La pente en (0, 0) est 0.
Le maximum est atteint en x = 2 et vaut $4e^{-2}$.
$f''_2(x) = (x^2 – 4x + 2)e^{-x} = 0$ admet deux solutions $x^* = 2 – 2^{1/2} \approx 0,59$ et $x^{**} = 2 + 2^{1/2} \approx 2,41$

$f_{-2}(x) = x^{-2} e^{-x}$; $f'_{-2}(x) = - e^{-x}x^{-3} (2 + x)$ qui est toujours < 0 puisque x > 0.
$f''_2(x) = x^{-4}(x^2 + 4x + 6)e^{-x}$ qui n'admet pas de racine.
La fonction est donc décroissante sur R+ : on a $\lim_{x\to+\infty} f_{-2}(x) = 0$ et $\lim_{x\to0} f_0(x) = + \infty$.
Elle n'admet pas de maximum.
Intersection des graphes : $f_2(x) = x^2e^{-x} = f_{-2}(x) = x^{-2} e^{-x}$; d'où $x^4 = 1$, c'est-à-dire x = 1 ou -1.

Comme x > 0, seul x = 1 est admissible. En ce point, x = 1 et $f_2(1) = f_{-2}(1) = 1/e$.

2) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
2a) Calculer les dérivées f'_a et f''_a et étudier leurs racines selon la valeur de a.
2b) Etudier les limites de f_a quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0, ainsi que la limite de f'_a quand x tend vers 0 ; par continuité la fonction f sera alors prolongée en 0.
2c) Construire le tableau des variations de la fonction f_a.

2a) $f'_a(x) = x^{a-1}(a - x)e^{-x}$

$f''_a(x) = x^{a-2}(x^2 - 2ax + a(a-1))e^{-x}$

(Ces calculs ne dépendent pas du signe de a)

$f'_a(x) = 0$ en $x = a$ et aussi en $x = 0$ si $a > 1$.

$f''_a(x) = x^{a-2}(x^2 - 2ax + a(a-1))e^{-x} = 0$ en $x = 0$ si $a > 2$ et si $x^2 - 2ax + a(a-1) = 0$; le discriminant réduit est égal à a, et deux racines non nulles existent :

$x_1 = a + a^{1/2}$ et $x_2 = a - a^{1/2} = a^{1/2}(a^{1/2} - 1)$

Comme $x > 0$, x_1 est toujours admissible ; mais si $a < 1$, $x_2 < 0$, donc non admissible.

2b) *Limites :*

Quand $x \to +\infty$, $f_a(x) \to 0$; quand $x \to 0$, $f_a(x) \to 0$

Quand $x \to 0$, $f'_a(x) \to 0$ si $a > 1$ (tangente horizontale), et $\to +\infty$ si $a < 1$ (tangente verticale).

On prolongera donc la fonction f_a en 0 par $f_a(0) = 0$.

2c) *Variations :*

f_a croît de 0 au maximum $M(a) = a^a e^{-a}$ sur $(0 ; a)$, et décroît de $M(a)$ à 0 sur $(a ; +\infty)$.

3) Dans cette question, on suppose que $a < 0$. Comme à la question précédente, étudier les variations de f_a.

Comme à la question 2, on a :

$f'_a(x) = x^{a-1}(a - x)e^{-x}$

$f''_a(x) = x^{a-2}(x^2 - 2ax + a(a-1))e^{-x}$

$f'_a(x) = 0$ pour $x = a$, mais comme a est < 0, pas de racine.

Le signe de f'_a est < 0.

De même, $a < 0$ donc pas de racines pour l'équation $f''_a(x) = 0$.

Limites :

Quand $x \to +\infty$, $f_a(x) \to 0$; quand $x \to 0$, $f_a(x) \to +\infty$

Variations :

La fonction f_a est monotone décroissante sur R+ de $+\infty$ à 0.

4) Lorsque celui-ci existe, on note M_a (x_a, y_a) le point maximum de la courbe C_a représentant la fonction f_a pour a réel. Donner l'expression $y_a = g(x_a)$ du lieu géométrique parcouru par les points M_a lorsque a parcourt R.
Etudier les variations de la fonction g.

Quand il existe (c'est-à-dire quand $a > 0$ d'après les questions 2 et 3), le maximum est atteint en M_a d'abscisse $x_a = a$ et d'ordonnée $y_a = a^a e^{-a}$.

Le lieu géométrique de M_a est donc de la forme $y_a = g(x_a)$ où la fonction g a pour expression $g(x) = x^x e^{-x}$.

On a : $x > 0 \rightarrow g(x) > 0$

$\mathrm{Ln}\, g = x(\mathrm{Ln}x - 1)$

Quand $x \rightarrow 0$, $g \rightarrow 1$; quand $x \rightarrow +\infty$, $g \rightarrow +\infty$

$g'/g = \mathrm{Ln}x$.

Le signe de g' est celui de Lnx, négatif pour $x < 1$ et positif pour $x > 1$.

La fonction g est décroissante sur $(0 ; 1)$ de 1 à $1/e$, et croissante sur $(1 ; +\infty)$ de $1/e$ à $+\infty$.

5) On considère l'intégrale $J(a) = \int_{R+} x^a e^{-x} dx$.

5a) Calculer J(0), J(2).

$J(0) = 1$

$J(2) = 2$

5b) Etablir une relation entre J(a) et J(a-1).

En intégrant par parties : $J(a) = \int_{R+} x^a e^{-x} dx = [- x^a e^{-x}]_{(0, +\infty)} + a \int_{R+} x^{a-1} e^{-x} dx$

D'où : $J(a) = a\, J(a-1)$

5c) Donner la valeur explicite de J(a) dans le cas où a est un nombre entier.

$J(a) = a\,!$ pour a entier

6) Pour $x > 0$, on définit l'intégrale $L(x) = \int_1^x f_a(t)\, dt$.
6a) Calculer L(1)

$J(1) = 0$ (évidemment)

6b) On suppose que $x \geq 1$; proposer un minorant de L(x) c'est-à-dire une quantité m(x) telle que $L(x) \geq m(x)$. Calculer la limite de L(x) quand $x \rightarrow +\infty$.

On a $1 \leq t \leq x$; $e^{-t} \geq e^{-x} \geq e^{-1}$ et donc $f_a(t) \geq e^{-1} t^a$

$L(x) \geq e^{-1} (x^{a+1} - 1)/(a + 1) = m(x)$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $m(x) \rightarrow +\infty$ et donc $L(x) \rightarrow +\infty$.

Problème 2 :
Ce problème décrit un algorithme permettant de construire des codes secrets chiffrés.

Introduction :

1) Pour x réel, calculer la somme $K(x) = x^2 + x^3 + \ldots + x^n$.

2) En déduire l'expression de la somme $L(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}$.

Corrigé :

1) $K(x) = x^2 + x^3 + \ldots + x^n = x^2 (1 + x + \ldots + x^{n-2}) = x^2(1 - x^{n-1})/(1 - x)$

2) $L(x) = K'(x) = [nx^{n+1} - (n+1)x^n - x^2 + 2x]/(1 - x)^2$

Enoncé :

On appelle S_n la séquence de chiffres obtenue en écrivant les uns après les autres les nombres strictement de n chiffres (le premier chiffre ne peut être nul, sinon il s'agit d'un nombre composé de n-1 chiffres).
Dans une séquence S_n, pour chaque chiffre x, $0 \leq x \leq 9$, on désigne par $N_n(x)$ le nombre d'occurrences de x dans la séquence. Par exemple, la séquence S_1 est : $S_1 = 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$, et pour tout chiffre x = 0 à 9, $N_1(x) = 1$.

1) On écrit la séquence S_2 des nombres à deux chiffres, allant de 10 à 99 :
1a) Combien a-t-on écrit de chiffres au total ?
1b) Donner les valeurs de $N_2(x)$ pour x = 0 à 9.

2) Soit la séquence S_3 des nombres à trois chiffres, de 100 à 999.
2a) Combien a-t-on écrit de chiffres au total ?
2b) Donner les valeurs de $N_3(x)$ pour x = 0 à 9.

3) On considère maintenant la séquence S_4 des nombres à quatre chiffres, de 1000 à 9999, et on s'intéresse au seul chiffre x = 1.
3a) Combien S_4 comporte-t-elle de chiffres ?
3b) Donner la valeur de $N_4(1)$.

4) On définit la suite de chiffres notée T_n et définie comme étant la juxtaposition des séquences $S_1, S_2, \ldots, S_n$; par exemple, T_3 est la suite des chiffres constituée à partir des séquences S_1, S_2, S_3, donc composée de tous les nombres allant de 0 à 999.
Pour chaque chiffre x, x = 0 à 9, on note par $M_n(x)$ le nombre d'occurrences de x dans la suite T_n.
4a) Combien de chiffres au total comportent les suites T_2 et T_3 ?
4b) Donner, pour chaque entier x, x = 0 à 9, les nombres de fois $M_2(x)$ et $M_3(x)$ où x apparaît dans T_2 et T_3.
4c) Combien de chiffres au total comporte la suite T_4 ?
4d) Quelle est la valeur de $M_4(1)$?

5) On se place dans le cas général d'une séquence S_n et d'une suite T_n (telle que définie à la question 4), n étant un entier quelconque, n > 1.

5a) Combien de chiffres, notés respectivement A(n) et B(n), comportent la séquence S_n et la suite T_n ?
5b) Trouver une relation entre $M_n(1)$, $M_{n-1}(1)$ et $N_n(1)$.
5c) Trouver une relation entre $N_n(1)$ et $M_{n-1}(1)$.
5d) Montrer que $M_n(1)$ est une suite récurrente d'ordre 1 de la forme $M_n(1) = u + vM_{n-1}$ où u et v peuvent dépendre de n ; quelles sont les valeurs de u et v ?
5e) En déduire les expressions de $M_n(1)$ et $N_n(1)$ en fonction de n.

6) Pour constituer un code secret abc à 3 chiffres, on passe par deux étapes :
- la première étape consiste à utiliser un générateur de trois nombres aléatoires, notés x, y et z ;
- la deuxième étape est la fabrication du code secret abc composé des chiffres situés immédiatement après les $x^{ème}$, $y^{ème}$ et $z^{ème}$ chiffres 1 apparus dans une suite de type T.
La mise en œuvre de la première étape a conduit à x = 15, y = 82 et z = 1598.
Quel est le code secret abc correspondant à ce tirage ?

Corrigé

1) S_2 = 1 0 1 1 1 2 ………………. 9 8 9 9

   a) De 10 à 99 il y a 90 nombres à 2 chiffres, soit une séquence 180 chiffres.

   b) Chiffre 0 : on ne le trouve que dans les dizaines (de 10 à 90) soit 9 fois.
   Les autres chiffres, par symétrie, ont une occurrence égale de (180 – 9)/9 = 19.
   Sinon, un calcul direct permet d'aller au résultat ; par exemple pour 1, le 1 est présent 11 fois de 10 à 19, puis 1 fois par dizaine allant de 20 à 90 (soit 8 dizaines) : $N_2(1)$ = 11 + 1 x 8 = 19

2) a) Passons à S_3, séquence des nombres de 3 chiffres (100 → 999) ; cela représente un ensemble de 3 x 900 = 2700 chiffres.

   b) Le plus simple est de découper par centaines (100 → 199 ; 200 → 299 …. ; 900 → 999).
   Prenons l'exemple de la première centaine allant de 100 à 199 : le nombre total de chiffres est égal à 300.
   Le nombre de 1 écrits est égal à 100 + le nombre de 1 apparaissant dans la séquence allant de 00 à 99.
   On se retrouve dans le cas de la question 2 sauf pour le chiffre 0, rencontré ici 20 fois.
   Tous les chiffres x (x ≠1) sont écrits 20 fois, sauf « 1 » écrit 100 + 20 = 120 fois. On vérifie que le nombre total de chiffres est bien égal à 300 (120 + 9 x 20).

   De la même façon, pour chaque centaine commençant par x non nul, le principe est le même, et par symétrie le nombre de x est constant pour x = 1 à 9.
   Le nombre de 0 est 20 x 9 (puisque le chiffre des centaines n'est jamais 0).
   Donc : $N_3(0)$ = 180 et pour x ≠ 0 $N_3(x)$ = (2700 – 180)/9 = 2520/9 = 280.

   Ce résultat est aussi retrouvé, par exemple pour 1, comme 120 fois dans la $1^{ère}$ centaine et 8 x 20 pour les 8 autres centaines, égal à 280.

3) a) Entre 1000 et 9999, il y a 9000 nombres de 4 chiffres, soit un total de chiffres écrits dans S_4 de 4 x 9000 = 36000.

b) Comme pour la question 2, partons du premier millier de 1000 à 1999.
Le nombre de 1 entre 1000 et 1999 est égal au nombre de 1 entre 000 et 999 + 1000 x 1
Le nombre de 1 entre 000 et 999 est 300 (question 2).
Le nombre de 1 entre 1000 et 1999 est 1000 + 300 = 1300.
Dans ce même millier, le nombre de x (x différent de 0 et 1) est 300.

Par extension aux autres milliers : le nombre de 1 entre 1000 et 9999 est $N_4(1)$ = 1300 + 8 x 300 = 3700.

Nombre de 0 : $N_4(0)$ = 36000 – 9 x 3700 = 2700

Autre méthode possible : la suite (000 → 999) est la juxtaposition de (000 → 099) et de (100 → 999).
De 000 à 099, il y a 20 « 1 ».

De 000 à 999, il y a 300 fois 0 (120 fois de 000 à 099, et 180 fois de 100 à 999 (question 2) ; on ajoute le chiffre des milliers qui va de 1 à 9 donc un total de 0 qui vaut 9 x 300 = 2700.

4) 4a) Le nombre de chiffres de T_1 est 10 (évidemment).
Pour la suite globale T_2, on a un total de 190 chiffres.
Pour T_3 le nombre total de chiffres est (10) + (180) + (2700) = 2890.

4b) Dans T_2, $M_2(0)$ = 1+9 = 10 ; pour x = 1 à 9 on a $M_2(x)$ = 1 + 19 = 20.
(Le nombre total de chiffres écrits est bien de 10 + 9 x 20 = 190).

Dans T_3 :
Nombre de 0 : $M_3(0)$ = 1 + 9 + 180 = 190
Nombre de 1 : $M_3(1)$ = 1 + 19 + 280 = 300
C'est aussi la valeur de $M_3(x)$ pour x = 2, 3, …, 9.

4c) Cas de T_4
Au total le nombre de chiffres de la suite T_4 est 10 + 180 + 2700 + 36000 = 38890.

4d) D'après les résultats de la question 3, on obtient :
- 0 : $M_4(0)$ = 190 + 2700 = 2890.
- x non nul : $M_4(x)$ = 300 + 3700 = 4000, d'où $M_4(1)$ = 4000.
- D'où un total égal à 2890 + 9 x 4000 = 38890.

5) 5a) S_1, séquence des chiffres, est composée de A(1) = B(1) = 10 chiffres.
Pour n > 1, S_n est la séquence des nombres à n chiffres qui vont de 10^{n-1} à $10^n – 1$.
Elle est constituée à partir de $10^n – 10^{n-1}$ nombres.
Elle comporte donc $A(n) = n(10^n – 10^{n-1})$ chiffres.
$A(n) = 9.10^{n-1}.n$
La suite T_n est la juxtaposition des séquences S_1, S_2, …. S_n.
On en déduit pour n > 1 :
$B(n) = \sum_{k=1}^{n} A(k) = A(1) + \sum_{k=2}^{n} A(k) =$

$= 10 + \sum_{k=2}^{n} (9k)10^{k-1} = 10 + 9 \sum_{k=2}^{n} k.10^{k-1}$

D'après les calculs introductifs : posons $K(x) = x^2 + \ldots + x^n = x^2(1 - x^{n-1})/(1 - x)$

$\sum_{k=2}^{n} k.10^{k-1}$ n'est autre que la dérivée de K(x) prise au point x = 10.

$K'(x) = \{(x-1)[2x(x^{n-1}-1) + (n-1)x^n] - x^2(x^{n-1}-1)\}/(x-1)^2$

Après simplification, on trouve : $K'(x) = [nx^{n+1} - (n+1)x^n - x^2 + 2x]/(x-1)^2$

Pour x = 10 : $\sum_{k=2}^{n} k.10^{k-1} = [n10^{n+1} - (n+1)10^n - 80]/81$

D'où l'expression de B(n), nombre de chiffres de T_n :

$B(n) = 10 + [n10^{n+1} - (n+1)10^n - 80]/9$

On vérifie bien B(2) = 190, B(3) = 2890 et B(4) = 38890.

5b) On a de façon évidente : $M_n(1) = M_{n-1}(1) + N_n(1)$

5c) On a $N_n(1) = 10^{n-1} + 9\,M_{n-1}(1)$

en ajoutant le nombre de 1 apparaissant en début de nombre aux 1 intervenant dans les nombres ne commençant pas par 1.

5d) A partir des relations trouvées en 5b et 5c, on a :

$M_n(1) = 10^{n-1} + 10M_{n-1}(1)$

$u = 10^{n-1}$ et $v = 10$

5e) En procédant par récurrence ou en écrivant la relation trouvée en 5d de n jusqu'à 1, et en multipliant par 10 la relation pour n-1, 10^2 celle pour n-2, etc, on trouve aisément par élimination :

$M_n(1) = n.10^{n-1}$

On en déduit, d'après 5c, pour n > 1, $N_n(1) = 10^{n-1} + 9(n-1)10^{n-2}$

Remarque : on retrouve par le calcul les valeurs précédemment obtenues pour $M_n(1)$ et $N_n(1)$ pour n = 1 à 4.

6) D'après les résultats qui précèdent, le 15ème « 1 » est entre 10 et 99 puisque $N_2(1)$ = 19 et $M_2(1)$ = 20 ; le 82ème « 1 » survient entre 100 et 999 puisque $M_3(1)$ = 300 et le 1598ème est entre 1000 et 9999 puisque $M_4(1)$ = 4000.
Plus précisément :

- Le 15ème « 1 » arrive quand on écrit 41, dans la dizaine des « 4 » : 4 0 4 1 4 2 ; le chiffre qui le suit est un 4.
- Positionnons le 82ème « 1 » : il y a 20 «1 » de 0 à 99, 11 de 100 à 109, 21 de 110 à 119, puis 11 ensuite par dizaine. En 149, il y a eu 85 « 1 » écrits. Le 82ème apparaît en écrivant le nombre 146, le chiffre qui le suit est un 4.
- Positionnons le 1598ème « 1 » : d'après la question 3, le 1600ème « 1 » apparaît quand on écrit 1999. Le 1598ème « 1 » correspond donc au nombre 1997, le chiffre qui suit ce « 1 » est un 9.

- Le code secret est ainsi : 449

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

Juin 2021

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice 1 :

1) Donner une primitive, sur son domaine de définition (que l'on ne demande pas de préciser), de la fonction f définie par $f : x \rightarrow f(x) = (x^2 - 1) / (x^3-3x+1)^2$.

2) Calculer l'intégrale B définie par : $B = \int_0^{\sqrt{\pi}} x.\sin(x^2)\,dx$

1) On pose $u = x^3 - 3x + 1$; $du/dx = 3(x^2 - 1)$
f peut être exprimée sous la forme $u' / 3u^2$, dérivée de $- 1/3u = - 1/3(x^3 - 3x + 1)$

2) Calcul de B :
On pose $u = x^2$, $du = 2x.dx$, et $2B = \int_0^{\pi} \sin u.\,du$

D'où $B = (- \cos \pi - (- \cos 0))/2 = 1$

Exercice 2 :

Soit M la matrice carrée :

$M = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 (avec $\lambda_1 < \lambda_2$) et des vecteurs propres v_1 et v_2 associés de la matrice M.

2) On note par Δ la matrice diagonale formée par les valeurs propres rangées dans l'ordre croissant.
On rappelle qu'une matrice régulière est appelée également matrice inversible.
Donner l'expression d'une matrice régulière P telle que $M = P\,\Delta\,P^{-1}$.

3) Calculer la matrice M^n, pour n entier positif ou nul.

4) On considère la suite u(n), n entier positif ou nul, récurrente d'ordre 2 définie par :
$u(n+1) = 5u(n) - 6u(n-1)$, avec $u(0) = u(1) = 1$
On note V_n le vecteur colonne défini par : $V_n = \begin{pmatrix} u(n+1) \\ u(n) \end{pmatrix}$

Trouver une relation entre V_n, V_{n-1} et M.

5) Donner l'expression du terme général u(n) en fonction de n.

6) Calculer $\lim_{n\to+\infty} u(n)$.

1) Le déterminant de la matrice $M - \lambda I$ conduit à l'équation caractéristique qui est :

$-\lambda(5 - \lambda) + 6 = 0$, soit $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$.

Cette équation admet deux racines : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

Vecteur propre associé à $\lambda_1 = 2$:

$3x - 6y = 0$

Nous prendrons v_1 : $x = 2$ et $y = 1$

Vecteur propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$2x - 6y = 0$

soit v_2 : $x = 3$ et $y = 2$

2)

$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

La matrice P est formée par les vecteurs propres.

$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Un calcul simple montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

On vérifie aisément $M = P\,\Delta\,P^{-1}$

3) On a : $M^n = P\,\Delta^n\,P^{-1}$

Après calculs, on trouve :

$$M^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3.2^{n+1} - 2.3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3.2^n - 2.3^n \end{pmatrix}$$

4) Le résultat est évident : $V_n = M.V_{n-1}$

5) Partant de $V_n = M\ V_{n-1}$ et allant jusqu'à $V_1 = M\ V_0$, on en déduit avec une récurrence simple :

$V_n = M^n\ V_0$, avec $(V_1)' = (1, 1)$ (le symbole ' désigne la transposition)

Or $V_n = (u(n+1), u(n))'$

Pour avoir l'expression de u(n), il suffit de prendre la somme des termes de la deuxième ligne de M^n.

Soit $u(n) = -2^n + 3^n + 3.2^n - 2.3^n = 2^{n+1} - 3^n$

6) $u(n) = 2^{n+1} - 3^n = 3^n\ (2(2/3)^n - 1)$ qui tend vers $-\infty$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 3 :

On considère une expérience aléatoire E dont l'un des résultats possibles est un événement noté A de probabilité p, $0 < p < 1$; on posera $1 - p = q$.
On réalise une suite d'expériences E à l'identique et indépendamment les unes des autres, et on définit la variable aléatoire N comme étant le rang de la première expérience dont le résultat est l'événement A.

1) Donner la loi de la variable N, c'est-à-dire l'expression de la probabilité $P(N = n)$ en fonction de p, q et de l'entier n ($n > 0$).

2) Calculer l'espérance mathématique E(N) de la variable N.

3) Calculer la variance V(N) de la variable N.

4) Calculer la probabilité que N soit un nombre entier pair.

5) On rappelle que si A et B sont deux événements, la probabilité conditionnelle de A/B, c'est-à-dire que A se réalise sachant que b est réalisé, est $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$.
Calculer $P(N = 2/\ N \text{ pair})$ la probabilité que $N = 2$ sachant que N est pair.

1) N prend des valeurs entières, $N > 0$; dire que $N = n$ signifie que A est sorti comme résultat de l'expérience numéro n, et donc que les n-1 premières expériences ont eu comme résultat le complémentaire de A, de probabilité $q = 1 - p$.

$P(N = n) = q^{n-1}.p$

2) $E(N) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(N = k) = p(1 + 2q + 3\ q^2 + \ldots) = p(1/(1-q))' = 1/p$

3) On rappelle que $V(N) = E(N^2) - E^2(N)$

E(N) est donnée par la question 2.

$E(N^2) = \Sigma_{k=1à+\infty}\, k^2P(N = k)$

On remarque que $k^2 = k(k-1) + k$, d'où :

$E(N^2) = \Sigma_{k=1à+\infty}\, k(k-1)P(N = k) + \Sigma_{k=1à+\infty}\, kP(N = k) = \Sigma_{k=1à+\infty}\, k(k-1)pq^{k-1} + \Sigma_{k=1à+\infty}\, k\, pq^{k-1}$

$E(N^2) = (2pq + p^2)/p^3$

Ce qui conduit à $V(N) = q/p^2$

4) P(N pair) = P(N = 0 ou 2 ou 4 …etc) = $\sum_{k=1}^{\infty} P(N = 2k) = pq/(1 - q^2) = q/(1 + q)$

5) P(N = 2/ N pair) = P(N = 2)/P(N pair) = $1 - q^2$

Exercice 4 :

On considère le polynôme P, de degré 3, de la forme $P(x) = x^3 + ax^2 + bx$, avec a et b réels. On suppose que P vérifie la relation T :

$$(T) \qquad \forall\, x \in R,\ P(x + 1) - P(x) = 3x^2$$

1) Calculer P(0), P(1), P(2), P(3), P(4), P(-1), P(- 2).

2) Calculer les coefficients a et b.

3) Existe-t-il un polynôme de la forme $x^3 + ax^2 + bx$, a et b réels, vérifiant la relation (T) ?

1) P(0) = 0

P(1) – P(0) = 0 d'où P(1) = 0

P(2) = P(1) + 3 = 3

P(3) = P(2) + 12 = 15

P(4) = P(3) + 27 = 42

Pour x = -1 : P(0) – P(-1) = 3, d'où P(-1) = P(0) – 3 = - 3

Pour x = -2 : P(-2 + 1) – P(-2) = 12 d'où P(-2) = P(-1) – 12 = - 15

2) A partir de P(1) et P(-1) :

0 = 1 + a + b

-3 = - 1 + a - b

⇒ a = - 3/2 et b = 1/2

3) Le polynôme P vérifiant la relation (T) s'écrit : $P(x) = x^3 - 3x^2/2 + x/2$

Exercice 5 :

1) Soit ab un nombre de deux chiffres, compris entre 00 et 99, écrit dans le classique système décimal ; $0 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$. Par convention, les chiffres 0, 1, 2, …, 9 seront écrits avec deux chiffres : 00, 01, 02, …, 09.

On définit le nombre D égal à la valeur absolue de la différence entre ab et ba, c'est-à-dire que $D = |ab - ba|$.

Montrer que, quel que soit le nombre ab, D est divisible par 9.

2) Soit abc un nombre de trois chiffres, compris entre 000 et 999 ; $0 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, et $0 \leq c \leq 9$.

Quels sont les diviseurs des nombres $E = |abc - cba|$ et $F = |abc - bac|$?

Corrigé :

1) Un nombre ab est égal à $10a + b$.

$ab - ba = 10a + b - (10b + a) = 9(a - b)$

$D = 9|a - b|$ est divisible par 9

2) $abc - cba = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99(a - c)$

$E = 99|a - c|$ divisible par 99, donc par 3, 9, 11, 33 (et aussi par les diviseurs de $a - c$)

De même : $abc - bac = 100a + 10b + c - 100b - 10a - c = 90(a - b)$

$F = 90|a - b|$ divisible par 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 30, 45 (et aussi par les diviseurs de $a - b$)