ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE-DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes et ln le logarithme népérien.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{3+\sin x}dx$.

   Par le changement de variable $\sin x = u$, il vient

   $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{3+\sin x}dx = \int_0^1 \frac{du}{u+3} = [\ln(3+u)]_0^1 = 2\ln 2 - \ln 3.$$

2. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x+5\cos x - \ln x}{5x+1+\ln(x^2+1)}$.

   La fonction cos est bornée sur $\mathbf{R}$; par ailleurs $\ln x$ et $\ln(x^2+1)$ sont négligeables devant x au voisinage de $+\infty$. On en déduit que

   $$\lim_{n\to\infty} f(x) = \frac{1}{5}.$$

3. Donner le comportement au voisinage de $x = 0$ de la même fonction.

   Au voisinage de 0 (à droite pour que f soit définie), $\ln x$ tend vers $-\infty$, donc le numérateur de f tend vers $+\infty$. Le dénominateur tend vers 1, donc

   $$\lim_{n \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

4. Ecrire le nombre complexe $z = -2\sqrt{3} - 2i$ sous forme trigonométrique.

   $$-2\sqrt{3} - 2i = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right).$$

5. Donner le domaine de définition de la fonction

   $$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

   $\sqrt{x^2-1}$ est bien définie si $x \geq 1$ ou $x \leq -1$. Si $x \geq 1$, $x + \sqrt{x^2-1} \geq 1 > 0$ et donc f est bien définie ; si $x \leq -1$, en posant $u = -x$, $u > 0$ et $u^2 > u^2 - 1$ donc $u > \sqrt{u^2-1}$. Par suite, $-x > \sqrt{x^2-1}$ et $x + \sqrt{x^2-1} < 0$, donc f n'est pas définie. En définitive, le domaine de définition de f est $[1, +\infty[$.

6. Donner une expression simple de la dérivée de la fonction définie à la question précédente.

   En utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, il vient :

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$

7. Une étude montre qu'après un repas, 1 personne sur 3 prend un café, 1 personne sur 6 en prend 2, et les autres n'en prennent pas du tout. Deux personnes viennent de finir leur repas, et on note X le nombre de cafés consommés : pour toute valeur de k pertinente, donner la probabilité pour que X soit égal à k et en déduire l'espérance de X.

   Notons d'emblée que d'après l'énoncé, la probabilité pour qu'une personne ne prenne pas de café est égale à $1 - 1/3 - 1/6 = 1/2$.

   Le nombre de cafés consommés varie entre 0 et 4. Voici le tableau où on lit ligne à ligne le nombre de cafés consommés par A, le nombre de cafés consommés par B, la probabilité d'avoir cette configuration, et la valeur correspondante pour la variable X.

A	0	0	0	1	1	1	2	2	2
B	0	1	2	0	1	2	0	1	2
P	1/4	1/6	1/12	1/6	1/9	1/18	1/12	1/18	1/36
X	0	1	2	1	2	3	2	3	4

   On en déduit immédiatement que la loi de X est donnée par $P(X = 0) = 1/4$, $P(X = 1) = 1/3$, $P(X = 2) = 5/18$, $P(X = 3) = 1/9$ et $P(X = 4) = 1/36$.

L'espérance de X se calcule alors comme suit :

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{18} + 3 \times \frac{1}{9} + 4 \times \frac{1}{36} = \frac{4}{3}.$$

8. On considère la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Cette suite est-elle croissante ? Est-elle convergente ?

   On a $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}$. Par suite, en éliminant 2 à 2 les termes redondants dans les sommes, on obtient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{2n+2+2n+1-2(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}. \end{aligned}$$

   On en déduit que (u_n) est une suite croissante. De plus, comme $\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a

$$u_n \leq \frac{n}{n+1} < 1$$

   pour tout entier n.
   (u_n) est donc croissante et majorée par 1, par suite elle est convergente.

9. On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$ pour $n \geq 0$. Déterminer la nature de la suite définie par $v_n = u_n - 1$, et en déduire l'étude de la convergence de la suite (u_n).
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 3u_n - 3 = 3v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de premier terme -1 et de raison 3. Par suite, v_n tend vers $-\infty$ quand $n \to +\infty$, et il en va de même pour $u_n = v_n + 1$.

10. Résoudre l'equation $x^4 + 4x^2 - 1 = 0$ dans $\mathbf{R}$, puis dans $\mathbf{C}$.
    Posons $X = x^2$. X est alors solution de l'équation $X^2 + 4X - 1 = 0$. Le discriminant réduit de cette équation du second degré est égal à 5, et ses solutions sont donc $X_1 = -2 + \sqrt{5}$ et $X_2 = -2 - \sqrt{5}$.
    Dans $\mathbf{R}$, on doit avoir $X = x^2 \geq 0$ donc seul X_1 correspond à deux solutions réelles qui sont $\sqrt{-2+\sqrt{5}}$ et $-\sqrt{-2+\sqrt{5}}$.
    Dans $\mathbf{C}$, il faut ajouter aux deux solutions précédentes les deux racines carrées complexes de X_2, à savoir $i\sqrt{2+\sqrt{5}}$ et $-i\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Exercice 2 Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction de la variable réelle

$$f_n(x) = x^n e^{-x}$$

1. (a) Donner le domaine de définition de f_n, et calculer sa dérivée.
   f_n est définie sur tout $\mathbf{R}$, et sa dérivée vaut $f_n'(x) = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$.

(b) Montrer que toutes les courbes représentatives de f_n ont deux points communs, que l'on déterminera.

Pour tout n, on a $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = e^{-1}$, donc toutes les courbes représentatives passent par les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(1, e^{-1})$.

(c) Etudier les variations des fonctions f_1, f_2 et f_3, et dresser leurs tableaux de variation.

D'après le calcul de dérivée ci-dessus, les fonctions f_n admettent toutes une tangente horizontale et un maximum pour $x = n$, ce maximum valant donc $e^{-1} \simeq 0,37$ pour f_1, $4e^{-2} \simeq 0,54$ pour f_2, et $27e^{-3} \simeq 1,34$ pour f_3. Par croissance comparée des fonctions puissance et exponentielle, il vient immédiatement que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

En outre :

— si n est pair, f_n' s'annule également en 0 et f_n est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]n, +\infty[$, croissante sur $]0, n[$; enfin, $\lim_{n\to-\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim_{n\to-\infty} f_n(x)/x = -\infty$: la courbe de f_n admet donc une branche parabolique d'axe Oy en $-\infty$;

— si n est impair et $n \geq 3$, f_n' s'annule également en 0 sans changer de signe, et f_n est décroissante sur $]n, +\infty[$, croissante sur $]-\infty, n[$; enfin, $\lim_{n\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim_{n\to-\infty} f_n(x)/x = +\infty$: la courbe de f_n admet donc une branche parabolique d'axe Oy en $-\infty$;

— si $n = 1$, f_1' ne s'annule que pour $x = 1$: f_1 est décroissante sur $]1, +\infty[$, croissante sur $]-\infty, 1[$; enfin, $\lim_{n\to-\infty} f_1(x) = -\infty$ et $\lim_{n\to-\infty} f_n(x)/x = +\infty$: la courbe de f_1 admet donc une branche parabolique d'axe Oy en $-\infty$.

On en déduit les tableaux de variation de ces trois fonctions.

(d) Représenter graphiquement f_1, f_2 et f_3 sur une même figure. On précisera notamment les pentes des courbes au point d'abscisse 0.

Ces courbes se déduisent également de l'étude précédente, en notant que f_2 et f_3 admettent une tangente horizontale en 0 (qui est en fait un point d'inflexion), alors que la courbe représentative de f_1 admet une pente égale à $1/e$ en ce point.

(e) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f_n au point d'abscisse 1.

L'équation de la tangente en ce point est de la forme $y = ax + b$. On a $a = f_n'(1) = e^{-1}(n - 1)$ et comme la droite passe par le point $(1, e^{-1} = f_n(1))$, il vient que $b = (2 - n)e^{-1}$.

(f) On suppose que cette tangente coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(4/5, 0)$: quelle est la valeur de n ?

Il suffit d'écrire que $0 = e^{-1}(n - 1)(4/5) + (2 - n)e^{-1}$ pour conclure que cela n'est possible que pour $n = 6$.

2. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$

(a) Calculer I_1 et I_2.

Par une intégration par parties, il vient :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 xe^{-x}dx \\ &= \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx \\ &= -e^{-1} - \left[e^{-x}\right]_0^1 \\ &= 1 - 2e^{-1}. \end{aligned}$$

De même ;

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 x^2e^{-x}dx \\ &= \left[-x^2e^{-x}\right]_0^1 + 2\int_0^1 xe^{-x}dx \\ &= -e^{-1} + 2I_1 \\ &= 2 - 5e^{-1}. \end{aligned}$$

(b) Etudier la monotonie de la suite I_n.
pour tout $x \in [0,1]$ et tout entier n , $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$. Comme de plus $e^{-x} > 0$, on en déduit que $0 \leq x^{n+1}e^{-x} \leq x^n e^{-x}$, puis que $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$: la suite (I_n) est donc décroissante.

(c) Montrer que $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
Pour tout $x \in [0,1]$, $0 < e^{-x} \leq 1$, donc $0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n$. Par suite, $I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

(d) Conclure quant à la convergence de la suite (I_n).
On a donc $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, et par le théorème dit "des gendarmes", la suite (I_n) tend vers 0.

3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.
En faisant l'intégration par parties avec $u' = x^n$ et $v = e^{-x}$, il vient :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}e^{-x}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx \\ &= \frac{1}{n+1}(e^{-1} + I_{n+1}). \end{aligned}$$

(b) En déduire que

$$0 \leq I_n - \frac{1}{(n+1)e} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

D'après la question précédente,

$$In - \frac{1}{(n+1)e} = \frac{I_{n+1}}{n+1}.$$

Cette quantité est donc positive, et il suffit d'appliquer le résultat de la question 2c pour conclure

(c) Déterminer la limite de la suite (nI_n) quand $n \to \infty$.

On a donc

$$0 \leq nIn - \frac{n}{(n+1)e} = \frac{n}{(n+1)(n+2)}.$$

et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{e}$$

Exercice 3

1. Pour $a \in \mathbf{R}$ fixé, on considère la fonction de la variable réelle f_a définie par

$$f_a(x) = \frac{x+a}{1+x^2+a^2} \qquad \text{pour } x \neq 0$$

(a) Faire l'étude de cette fonction, dresser son tableau de variations et montrer qu'elle admet un unique maximum, atteint en un point x_a dont on donnera l'expression en fonction de a.

f_a est définie et dérivable sur tout $\mathbf{R}$. On voit immédiatement que sa limite en $+\infty$ et en $-\infty$ est nulle, et un calcul élémentaire montre que

$$f_a'(x) = \frac{-x^2 - 2ax + a^2 + 1}{(1+x^2+a^2)^2}.$$

$f'a$ est donc du signe de son numérateur, qui est un polynôme de degré 2 en a dont le discriminant réduit vaut $2a^2+1$ et les racines sont $-a-\sqrt{2a^2+1}$ et $-a+\sqrt{2a^2+1}$ f_a est donc décroissante sur $]-\infty, -a-\sqrt{2a^2+1}[$ et $]-a+\sqrt{2a^2+1}, +\infty[$, et croissante sur $]-a-\sqrt{2a^2+1}, -a+\sqrt{2a^2+1}[$. Le tableau de variation s'en déduit immédiatement, et on voit que f_a admet son maximum au point $x_a = -a+\sqrt{2a^2+1}$.

(b) Donner la valeur de ce maximum.

$$\begin{aligned}
f_a(x_a) &= \frac{-a+\sqrt{2a^2+1}+a}{1+\left(-a+\sqrt{2a^2+1}\right)^2+a^2} \\
&= \frac{\sqrt{2a^2+1}}{1+a^2+2a^2+1-2a\sqrt{2a^2+1}+a^2} \\
&= \frac{\sqrt{2a^2+1}}{2+4a^2-2a\sqrt{2a^2+1}} \\
&= \frac{1}{2\left(\sqrt{2a^2+1}-a\right)}.
\end{aligned}$$

(c) Dessiner la courbe représentative de la fonction f_2.

Elle se déduit simplement de ce qui précède en remarquant que $x_2 = 1$ et $f_2(x_2) = 1/2$.

2. On considère désormais la fonction de la variable y

$$g(y) = \frac{1}{2\left(\sqrt{2y^2+1}-y\right)}.$$

   (a) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation

   $$2y = \sqrt{2y^2+1}$$

   Remarquons d'emblée que toute solution réelle de cette équation doit être positive. Cela posé, en passant au carré, il s'agit de résoudre l'équation

   $$4y^2 = 2y^2 + 1$$

   dont la seule solution positive est $y = \sqrt{2}/2$.

   (b) Donner le domaine de définition et calculer la dérivée de g .

   Remarquons tout d'abord que $g(y)$ est évidemment bien définie pour tout $y \leq 0$? Si y est positif, $y^2 < y^2 + 1$ et en passant aux racines carrées, $y < \sqrt{y^2+1}$ (puisque y est positif. Par suite g est définie sur tout $\mathbf{R}$.

   D'après les formules de dérivation de fonctions composées, on a

   $$\begin{aligned} g'(y) = &= -\frac{1}{2}\frac{\frac{4y}{2\sqrt{2y^2+1}}-1}{\left(\sqrt{2y^2+1}-y\right)^2} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{2y-\sqrt{2y^2+1}}{\left(\sqrt{2y^2+1}-y\right)^2\sqrt{2y^2+1}}. \end{aligned}$$

   (c) Montrer que g' est de signe constant sur $]-\infty, \sqrt{2}/2[$ et sur $]\sqrt{2}/2, +\infty[$. En déduire la valeur maximale prise par $g(y)$.

   Le signe de g' est donc celui de $-2y + \sqrt{2y^2+1}$; d'après la question précédente, cette quantité s'annule uniquement pour $y = \sqrt{2}/2$. Si elle prenait des signes différents sur $]-\infty, \sqrt{2}/2[$, comme elle est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annulerait en un point $y_0 < \sqrt{2}/2$, ce qui est contradictoire avec ce qui précède : donc g' est de signe constant sur $]-\infty, \sqrt{2}/2[$, et par le même raisonnement, c'est vrai aussi sur $]\sqrt{2}/2, +\infty[$.

   Comme $g'(0) = 1/2$, il découle de ce qui précède que $g'(y) > 0$ sur $]-\infty, \sqrt{2}/2[$ et g est croissante sur cet intervalle.

   De même $g'(1)$ est du même signe que $-2+\sqrt{3}$, donc négatif et on en déduit que $g'(y) < 0$ sur $]\sqrt{2}/2, +\infty[$ et g est décroissante sur cet intervalle. De tout ce qui précède, on infère que g admet son maximum pour $y = \sqrt{2}/2$ et ce maximum vaut $g(\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}/2$.

   (d) Dresser le tableau de variations de g.

   Il se déduit de ce qui précède en notant que la limite de g en $+\infty$ et $-\infty$ vaut 0.

3. Donner la valeur maximale que peut prendre l'expression

$$\frac{x+y}{1+x^2+y^2}$$

quand x et y décrivent $\mathbf{R}$, et préciser pour quelles valeurs de x et y ce maximum est atteint.

D'après la première partie, le maximum en x de cette expression se trouve au point x_y et vaut $g(y)$. D'après la deuxième partie, le maximum de $g(y)$ vaut $\sqrt{2}/2$ et il est atteint en $y = \sqrt{2}/2$. Donc la valeur maximale de cette expression vaut $\sqrt{2}/2$; elle est atteinte pour $y = \sqrt{2}/2$ et $x = x_{\sqrt{2}/2}$, soit encore

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{2}{2} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ On considère la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

1. (a) Calculer I_0 et I_1.

   $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \pi/2.$

   $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1.$

   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

   En faisant le changement de variables $u = \pi/2 - x$, $du = -dx$, il vient :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sin^n \left(\frac{\pi}{2} - u\right) du \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\cos^n u du \end{aligned}$$

   d'où le résultat demandé.

   (c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

   Posons $u(x) = \sin^{n-1} x$ et $v(x) = \sin x$. On a alors $u'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x$ et $v(x) = -\cos x$ et l'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx &= \left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= 0 + (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx\right) \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

   On a donc $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ d'où le résultat demandé.

   (d) En déduire la valeur de I_{2n} et celle de I_{2n+1}.

Partant de $I_0 = \pi/2$, la relation précédente donne

$$\begin{array}{rcl} I_2 & = & \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \\ I_4 & = & \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \\ & & \textit{etc.} \end{array}$$

et par induction,

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}.$$

De même, partant de $I_1 = 1$, on arrive à

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \times 1.$$

2. (a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et que $\frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{n+2}{n+1}$.
Comme $0 \leq \sin x \leq 1$ pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $\sin^{n+1} x \leq \sin^n x$ sur cet intervalle, et en passant aux intégrales, on voit que la suite (I_n) est décroissante. On a donc

$$0 < \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$$

d'après la question 1c

(b) En déduire la limite de $\frac{I_n}{I_{n+1}}$ quand $n \to \infty$. L'inégalité précédente prouve, à l'aide du théorème dit "des gendarmes", que la suite (I_n) converge vers 1

3. En utilisant les résultats des questions 1 et 2, montrer que

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 2}{(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1} \right)^2.$$

D'après la question 1, on a

$$\begin{array}{rcl} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} & = & \frac{\frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}}{\frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \times 1} \\ & = & \frac{\frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}}{\times} \frac{2n+1}{2n} \times \frac{2n-1}{2n-2} \cdots \frac{3}{2} \times 1. \end{array}$$

Il suffit de simplifier cette fraction et de remarquer qu'elle tend vers 1 quand n tend vers l'infini (question 2) pour obtenir le résultat demandé.

4. Montrer que

$$(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1 = \frac{(2n)!}{2^n \times n!}$$

et en déduire que

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 1 &= \frac{(2n)!}{(2n)\times(2n-2)\times(2n-4)\cdots\times 2}\\
&= \frac{(2n)!}{(2n)\times(2(n-1))\times(2(n-2))\cdots\times(2\times 1)}\\
&= \frac{(2n)!}{2^n\times n!}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, le numérateur de la fraction obtenue à la question 3 vaut $2^n \times n!$ et la limite de $2n/(2n+1)$ quand $n\to\infty$ vaut 1. De tout cela on déduit que

$$\begin{aligned}
\pi &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2n}\frac{2n}{2n+1}\left(\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}\right)^2\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}\right)^2,
\end{aligned}$$

et passer à la racine carrée dans le résultat ci-dessus donne le résultat demandé.

5. On lance une pièce équilibrée $2n$ fois et on note p_n la possibilité d'obtenir exactement n résultats "pile". Déduire de ce qui précède que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}p_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Le nombre de "pile" obtenu en $2n$ lancers est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $2n$ et $1/2$, donc la probabilité d'obtenir exactement n "pile" en $2n$ lancers vaut

$$p_n = \frac{2n!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

Le résultat demandé se déduit alors immédiatement de la question précédente.

Exercice 5

1. Pour tout nombre entier $n\geq 1$, montrer l'inégalité

$$\frac{n}{\sqrt{n+1}} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

Comme $\sqrt{k} < \sqrt{n+1}$ pour tout entier k compris entre 1 et n, on trouve immédiatement que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{n}{\sqrt{n+1}}.$$

2. On considère désormais la suite définie par

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Etudier la monotonie, puis la convergence de cette suite.

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \end{aligned}$$

et le résultat de la question précédente prouve que cette quantité est négative : la suite (u_n) est donc décroissante.

Par ailleurs, il est clair que $u_n > 0$ pour tout n puisqu'il s'agit d'une somme de nombres positifs. Cette suite est donc décroissante et minorée, et par suite elle converge.

3. Prouver l'inégalité

$$u_{2n} < \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}} \\ &< \frac{1}{2}u_n+\frac{n}{2n}\frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\sqrt{k} > \sqrt{n}$ pour tout $k \geq n+1$, d'où le résultat demandé.

4. En déduire que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

On a vu que la suite (u_n) converge : notons l sa limite. En faisant tendre n vers l'infini dans l'inégalité de la question précédente, il vient $l \leq l/2+0$, soit $l/2 \leq 0$, et comme on sait déjà que $l \geq 0$, on en déduit que $l = 0$.

Exercice 6

1. Montrer que l'ensemble des nombres complexes $z = a+ib$ tels que $z(z+1) \in \mathbf{R}$ correspond à deux droites du plan complexe que l'on dessinera.

La partie imaginaire de $z(z+1)$ vaut $b(a+1)+ab = b(2a+1)$. Par suite, $z(z+1) \in \mathbf{R}$ si et seulement si cette quantité est nulle, c'est-à-dire si $b = 0$ ou $2a+1 = 0$. La première égalité correspond à la droite réelle (ce qui n'est pas surprenant !), et la deuxième est la droite des nombres complexes dont la partie réelle vaut $-1/2$.

2. On considère trois points distincts du plan affine A, B et C, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Montrer que les trois points sont alignés si et seulement si $\dfrac{z_C - z_B}{z_B - z_A} \in \mathbf{R}$.

   Trois points distincts du plan affine A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{AB}$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$ est $z_C - z_B$, celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$, et le résultat en découle immédiatement.

3. Déduire des questions précédentes l'ensemble des nombres complexes z tels que les images de z, z^2 et z^4 soient alignées.

   D'après ce qui précède, les images de z, z^2 et z^4 sont alignées si et seulement si $\dfrac{z^4 - z^2}{z^2 - z} \in \mathbf{R}$. Si $z = 0$ ou $z = 1$, $z = z^2 = z^4$ donc les trois points sont confondus, sinon en simplifiant la fraction ci-dessus par $z(z-1)$, on trouve que les points sont alignés si et seulement si $z(z+1) \in \mathbf{R}$, c'est-à-dire si l'image de z se trouve sur une des droites déterminées en 1 .

4. Illustrer ce résultat pour le nombre complexe vérifiant la propriété précédente et dont la partie imaginaire est égale à 1 (on pourra utiliser le même graphique qu'à la question 1).

   Le nombre en question est $z = -1/2 + i$: on a alors $z^2 = -3/4 - i$ et $z^4 = -7/16 + 3i/2$, et on vérifie graphiquement l'alignement des trois images.

Exercice 7

Deux personnes A et B jouent aux dés selon la règle suivante : A mise la somme a, B mise la somme b. Si le dé tombe sur 1 ou 2, A récupère sa mise et empoche celle de B ; s'il tombe sur 4, 5 ou 6 B récupère sa mise et empoche celle de A ; et s'il tombe sur 3, chaque joueur récupère sa mise. On suppose que le dé utilisé dans ce jeu n'est pas truqué, donc que chaque face apparaît avec la même probabilité.

On note X la variable aléatoire égale au gain de A (c'est-à-dire la différence entre ce qu'il obtient après le lancer du dé et ce qu'il a misé), et Y la variable aléatoire égale au gain de B. On note X la variable aléatoire égale au gain de A (c'est-à-dire la différence entre ce qu'il récupère après le lancer du dé et ce qu'il a misé), et Y la variable aléatoire égale au gain de B.

1. Donner les lois de X et Y ainsi que leurs espérances.

   La variable X peut prendre les valeurs b (si le dé tombe sur 1 ou 2), $-a$ (si le dé tombe sur 4, 5 ou 6) ou 0 (si le dé tombe sur 3). Comme le dé n'est pas truqué, la loi de X est donnée par :

$$\begin{aligned} P(X=b) &= \frac{1}{3} \\ P(X=-a) &= \frac{1}{2} \\ P(X=0) &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

   et l'espérance de X vaut

$$E(X) = \frac{1}{3}(b) + \frac{1}{2}(-a) + \frac{1}{6} \times 0 = \frac{b}{3} - \frac{a}{2}.$$

   De même, la variable Y peut prendre les valeurs $-b$ (si le dé tombe sur 1 ou 2), a (si le dé tombe sur 4, 5 ou 6) ou 0 (si le dé tombe sur 3). Comme le dé n'est pas truqué, la loi de Y

est donnée par :

$$\begin{aligned} P(Y=-b) &= \frac{1}{3} \\ P(Y=a) &= \frac{1}{2} \\ P(Y=0) &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

et l'espérance de Y vaut

$$E(Y) = \frac{1}{3}(-b) + \frac{1}{2}(a) + \frac{1}{6} \times 0 = \frac{a}{2} - \frac{b}{3}.$$

2. Calculer la valeur de la variable $X+Y$ et interpréter le résultat.

   Quelle que soit le résultat du dé, on voit que $X+Y=0$, ce qui traduit le fait que A gagne ce que B perd et inversement : c'est un jeu de somme nulle.

3. Le jeu est dit équitable si l'espérance du gain de chaque joueur est nulle. A quelle(s) condition(s) sur a et b le jeu ainsi défini est-il équitable ?

   On a $E(Y) = -E(X)$, donc il suffit d'avoir $E(X)=0$, c'est-à-dire que $b = 3a/2$ pour que le jeu soit équitable.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

CORRIGÉ de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute l'épreuve, *Ln* désigne le logarithme népérien, *e* le nombre de Néper, *R* l'ensemble des nombres réels, *C* l'ensemble des nombres complexes et *N* l'ensemble des entiers naturels.

Exercice n° 1

Soit l'application *f* définie sur R par : $f\ (x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

1. Etudier les variations et la convexité de *f*.

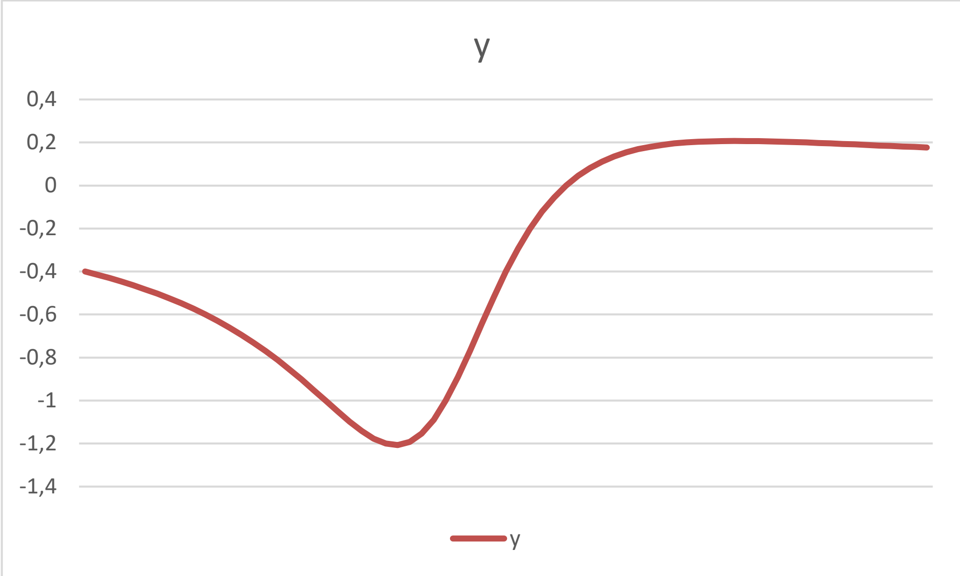
La dérivée de *f* est égale à : $f^{'}(x) = \dfrac{-x^2+2x+1}{(1+x^2)^2}$ qui s'annule pour $x = 1 \pm \sqrt{2}$. La fonction est donc croissante entre ces deux valeurs et décroissante à l'extérieur. Elle tend vers zéro aux infinis.

La dérivée seconde de *f* est égale à : $f^{''}(x) = \dfrac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(1+x^2)^3}$ qui s'annule pour trois valeurs : $x = -1;\ 2 \pm \sqrt{3}$. La fonction est concave sur les intervalles : $x = \left]-\infty, -1\right]\ et\ \left[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right]$ et convexe sinon.

2. Tracer le graphe de *f*.

On a les valeurs particulières suivantes :

$f(0) = -1;\ f(1) = 0;\ f(1+\sqrt{2}) = 1/2(1+\sqrt{2});\ f(1-\sqrt{2}) = -1/2(\sqrt{2}-1)$



3. Le graphe de *f* admet-il un centre de symétrie ?

Si le graphe admet un centre de symétrie, alors les deux points des extrema seront symétriques par rapport à ce centre, soit le point (1, 0). On pose $X = x-1; Y = y$ pour obtenir : $Y = \dfrac{X}{X^2+2X+2}$ et comme cette fonction n'est pas impaire, le graphe n'admet pas de centre de symétrie.

4. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n - 1}{x^2+1}\,dx$, pour tout $n \in N^*$.

Pour commencer, on a :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x \;\; -1}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}Ln(x^2+1) - Arctg\,x\right]_0^1 = Ln(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4} \quad \text{et}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 1 - \frac{2}{x^2+1}\,dx = \left[x - 2Arctg\,x\right]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{2}\;.$$

De façon générale : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n-1}{x^2+1}\,dx = J_n - \frac{\pi}{4}$, avec $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,dx$. On distingue les indices pairs et impairs.

- Pour $n=2p$

$$\frac{x^{2p}}{x^2+1} = x^{2p-2} - x^{2p-4} + \ldots + (-1)^{p+1} + \frac{(-1)^p}{x^2+1} \quad \text{et}$$

$$J_{2p} = \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p-3} + \ldots + (-1)^{p+1} + (-1)^p \frac{\pi}{4};\; I_{2p} = J_{2p} - \frac{\pi}{4}$$

- Pour $n=2p+1$

$$\frac{x^{2p+1}}{x^2+1} = x^{2p-1} - x^{2p-3} + \ldots + (-1)^{p+1} + \frac{(-1)^p x}{x^2+1} \quad \text{et}$$

$$J_{2p+1} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2p-2} + \ldots + \frac{(-1)^{p+1}}{2} + (-1)^p Ln(\sqrt{2});\; I_{2p+1} = J_{2p+1} - \frac{\pi}{4}$$

Exercice n° 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par : $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $(3+u_n)u_{n+1} + 1 = 0$.

1. Calculer u_1 *et* u_2. Montrer que la suite est monotone.

On trouve $u_1 = -\frac{1}{4}$ *et* $u_2 = -\frac{4}{11}$.

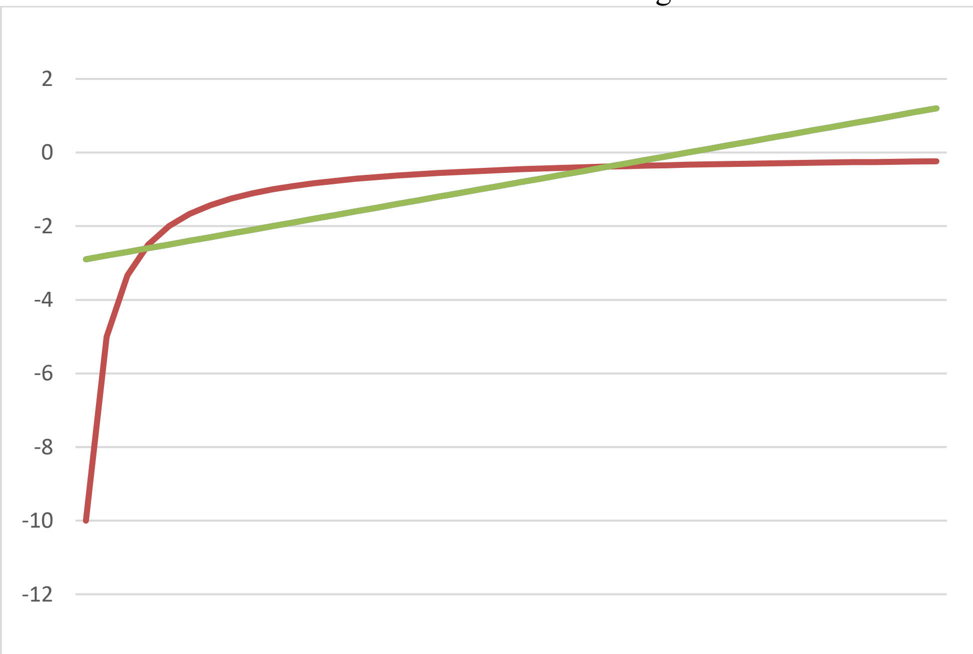
Soit la fonction *f* correspondante à la récurrence, à savoir $f(x) = -\frac{1}{3+x}$. Sa dérivée est égale à $f^{'}(x) = \frac{1}{(3+x)^2} > 0$. La fonction est croissante et donc la suite est monotone. Comme $u_2 < u_1 < u_0$, la suite est décroissante.

2. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in N}$ et déterminer sa limite si elle existe.
Si la suite converge vers une limite l, cette dernière est solution de l'équation de récurrence : $(3+l)l + 1 = 0$, soit $l = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

On montre par récurrence que : $\frac{-3+\sqrt{5}}{2} < u_n < 0$ pour $n \geq 1$.

La suite étant décroissante et minorée, elle converge vers $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

3. Interpréter graphiquement le résultat de la question précédente.
Le schéma représente le graphe de la fonction *f* et le tracé de la première bissectrice. Les points d'intersection correspondent aux deux valeurs trouvées candidates pour être la limite. L'interprétation se fait conformément au cours sur la convergence des suites récurrentes.



Exercice n° 3

On considère la fonction g définie sur l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls par :

$$g(x) = \cos(\sqrt{-x})$$

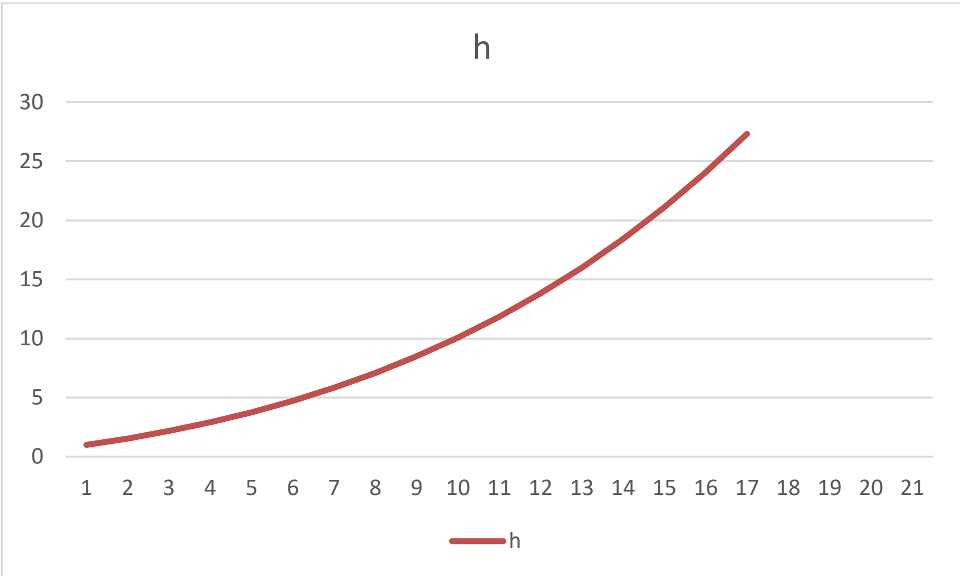
et la fonction h définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$h(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2}$$

1. Etudier les variations de h et tracer son graphe (on précisera la pente de la demie tangente en zéro).

La dérivée est égale à : $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2}) > 0$ et

$h_d'(0) \approx \frac{1}{4\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}+x/2-(1-\sqrt{x}+x/2) \approx 1/2$. Le graphe de la fonction admet une branche parabolique dans la direction verticale.



2. Calculer $I = \int_0^1 h(x)\ dx$

On pose $t = \sqrt{x} \Rightarrow 2t\,dt = dx$ pour obtenir : $I = \int_0^1 (e^t + e^{-t})\,t\,dt$. On fait alors classiquement une intégration par parties et on obtient : $I = \left[(e^t - e^{-t})t\right]_0^1 - \int_0^1 (e^t - e^{-t})\,t\,dt$

$$I = \left[(e^t - e^{-t})t - (e^t + e^{-t}\right]_0^1 = 2 - \frac{2}{e}.$$

3. Soit la fonction numérique f définie par : $f\ x) = \begin{cases} g(x) & \text{pour } x \le 0 \\ h(x) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$

Etudier la continuité de f ainsi que de ses dérivées premières et secondes.

La fonction est indéfiniment dérivable en dehors de zéro, la question se pose uniquement en x=0.

- Continuité de f en 0 :

On a $f(x) = g(0) = 0$ et $\underset{0^+}{Lim}\ f\ x) = \underset{0^+}{Lim}\,h(x) = 1$, donc f est continue.

- Continuité de la dérivée f' en 0 :

On a $f_g'(0) = g'(0) = \frac{1}{2}$ car $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}}\sin(\sqrt{-x})$, donc f' est continue (cf. question 1).

- Continuité de la dérivée seconde f'' en 0 :

On a $f_g''(0) = g''(0) = \frac{1}{12}$ car $g''(x) = -\frac{1}{4x}\left(\frac{1}{\sqrt{-x}}\sin\sqrt{-x} - \cos\sqrt{-x}\right)$ et

$\underset{0^+}{Lim} f''(x) = \underset{0^+}{Lim} h''(x) = \underset{0^+}{Lim}\frac{1}{8x}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}) + (e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}})\right)$, d'où en utilisant les développements limités de l'exponentiel au voisinage de zéro :

$e^{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{x}}{3!} + o(x^2)$ et $e^{-\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} + \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{x}}{3!} + o(x^2)$

$\underset{0^+}{Lim} f''(x) = \underset{0^+}{Lim}\frac{1}{8x}\left(-2 - \frac{2x}{3!} + 2 + x\right) = \frac{1}{12}$ donc f'' est continue.

Exercice n° 4

On note $P = \{z \in C \ / \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in C \ / \ |z| < 1\}$, où $\mathrm{Im}(z)$ désigne la partie réelle de z et $|z|$ son module. On considère l'application *f* définie sur *C* par : $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

1. Montrer que *f* est une bijection de *P* sur *D*.

La fonction est bien définie puisque $-i \notin P$. Il faut montrer que : $\forall Z \in D, \exists! z \in D \ / \ Z = f(z)$

$Z \in D \Rightarrow |Z| < 1 \Rightarrow |z-i| < |z+i| \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 < x^2 + (y+1)^2 \Rightarrow 4y > 0$ en posant $z = x + iy$

Par conséquent $z \in P$, et l'unicité est évidente donc l'application est bijective.

2. Déterminer le lieu géométrique des points d'affixe $f(z)$

Soit $z = x + iy$, alors $f(z) = \frac{(x^2 + y^2 - 1) + i(-2x)}{x^2 + (y+1)^2}$

Soit $Z = f(z) = X + iY \Rightarrow X = \frac{(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + (y+1)^2}; \ Y = \frac{(-2x)}{x^2 + (y+1)^2}$.

On pose $x = \cos\alpha; \ y + 1 = \sin\alpha$ pour obtenir : $X = -2\sin\alpha + 1; \ Y = -2\cos\alpha$.

Par conséquent : $(X-1)^2 + Y^2 = 4$. Le lieu géométrique est donc un cercle de centre A(1,0) et de rayon 2.

Exercice n° 5

On lance deux dés à 6 faces numérotées de 0 à 5. On effectue le produit des deux chiffres obtenus et on garde le chiffre des unités. On note *X* cette variable aléatoire. Par exemple si on obtient 3 et 4, le produit est égal à 12 et *X*=2.

1. Déterminer la loi de probabilité de *X* ?

Pour répondre aux différentes questions, on va présenter tous les cas possibles dans le tableau suivant :

Dé 1 /Dé 2	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	6	8	0
3	0	3	6	9	2	5
4	0	4	8	2	6	0
5	0	5	0	5	0	5

On peut remarquer que le tableau est symétrique puisque la multiplication est commutative.

La loi de probabilité est donc :

X	0	1	2	3	4	5	6	8	9
36 *P(X)*	15	1	4	2	3	5	3	2	1

2. Calculer la probabilité que *X*=0.

On obtient : $\Pr ob\ (X = 0) = \frac{15}{36}$

3. Calculer la probabilité que *X* soit strictement supérieure à 4.

On obtient : $\Pr ob\ (X > 4) = \frac{11}{36}$

4. Sur ce jeu (lancement de ces deux dés), un joueur mise 10 euros.
La règle du jeu est la suivante :
- Si *X*=0, le joueur perd sa mise,
- Si *X* est pair et différent de zéro, le joueur gagne 2 euros,
- Si *X* est impair, non nul et strictement inférieur à 9, le joueur gagne 4 euros,
- Si *X*=9, le joueur gagne 60 euros.

Calculer l'espérance de gain pour ce jeu. Commenter le résultat obtenu.

Soit *Y* cette fonction de gain, on a : $E(Y) = -10 \times \frac{15}{36} + 2 \times \frac{12}{36} + 4 \times \frac{8}{36} + 60 \times \frac{1}{36} = -\frac{34}{36}$.

Ce jeu est tout à fait réaliste, car d'une part les gains augmentent quand la probabilité diminue et d'autre part, l'espérance est négative, ce qui est toujours le cas des jeux d'argent (sinon pourquoi organiser de tels jeux !). De plus la redistribution (avec cette espérance) est de l'ordre de 9%., ce qui correspond à un chiffre moyen (ou inférieur) aux situations rencontrées dans différents jeux dans la réalité.

Exercice n° 6

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la suite (u_n) définie par :

$u_n = \dfrac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$, où $n! = 1\times 2\times \ldots \times n$

1. Calculer u_1

On a : $u_1 = \int_0^1 (1-t)e^t \, dt = \left[e^t\right]_0^1 - \int_0^1 t\,e^t \, dt = (e-1) - e + (e-1) = e-2$

2. Trouver une relation entre u_{n+1} et u_n, en déduire l'expression de u_n.

On a : $u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t \, dt = \dfrac{1}{(n+1)!}\left[(1-t)^{n+1} e^t\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$

En conclusion : $u_{n+1} = \dfrac{-1}{(n+1)!} + u_n$ et par conséquent : $u_n = -\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k!} + e - 2$

3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} u_n$.

On sait que $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} \to e$, donc $\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k!} \to e-2$, d'où $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.