ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ de la 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve comporte deux exercices et un problème, indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice 1

On définit sur R^2 la relation binaire notée * par :

$$(x, y) * (a, b) \Longleftrightarrow yx^2 \leq ba^2$$

1) Rappeler les définitions des relations d'équivalence et d'ordre.

2) La relation * est-elle une relation d'ordre ? Justifier précisément votre réponse.

1) Une relation $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E (d'éléments notés A, B, etc) est dite d'ordre si elle vérifie les propriétés de réflexivité (A $\mathcal{R}$ A pour tout A de E), d'antisymétrie ((A $\mathcal{R}$ B et B $\mathcal{R}$ A ==> A = B pour tous A et B de E)), de transitivité ((A $\mathcal{R}$ B et B $\mathcal{R}$ C) ==> A $\mathcal{R}$ C pour tous A, B et C de E).
Une relation $\mathcal{R}$ définie E est dite d'équivalence si elle vérifie les propriétés de réflexivité, de symétrie (A $\mathcal{R}$ B ==> B $\mathcal{R}$ A), et de transitivité.

2) La relation * ici définie vérifie bien la réflexivité (car $\leq$ contient l'égalité), la transitivité, mais pas l'antisymétrie. En effet, $yx^2 \leq ba^2$ et $ba^2 \leq yx^2$ entraîne bien $yx^2 = ba^2$, mais cette égalité n'implique pas a = x et b = y (par exemple, x = 2 et y = 2 $\rightarrow$ $yx^2 = 8$, a = 1 et b = 8 $\rightarrow$ $ba^2 = 8$, et pourtant $x \neq a$ et $y \neq b$).
Ce n'est donc pas une relation d'ordre.

Exercice 2

1) Soit E l'ensemble des points M de R^2 de coordonnées (x, y) vérifiant le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ -2x + 2y \leq 3 \\ 2x + 2y \leq 15 \\ 4x - 2y \leq 13 \end{cases}$$

Représenter graphiquement E.

E est donc l'ensemble des points M (x,y) tels que $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq x + 1,5$, $y \leq 7,5 - x$, $y \geq 2x - 6,5$.

Il s'agit de l'intérieur du pentagone non régulier défini par les points (0, 0), A (0, 3/2), B (3, 9/2), C (14/3, 17/6), D (13/4, 0).

2) On considère la famille de droites d'équations $x + 2y = m$, où m est un paramètre réel. Déterminer le point de E pour lequel $x + 2y$ est maximum, et déterminer cette valeur maximale.

Le maximum de $x + 2y$ est atteint au point B (3, 9/2) ; la valeur maximale est $m = 3 + 9 = 12$.

Problème

On rappelle que :

- Le symbole Ln désigne le logarithme népérien
- Le symbole $|\,.\,|$ désigne la valeur absolue
- L'inverse de la fonction tangente, notée tan, est la fonction « Arc tangente », notée Arctan : $y = \text{Arctan}(x)$ signifie que $x = \tan(y)$. La dérivée de Arctan(x) est $1/(1 + x^2)$.

* * *

On considère l'application f_a, de R dans R, définie par :

$$f_a : x \in R \rightarrow f_a(x) = \frac{x^a}{1 + |x|^a}$$

où a est un entier naturel.

Question préliminaire : étudier le cas particulier a = 0.

Pour a = 0, $f_0(x) = 1/2$, droite horizontale d'ordonnée 1/2.

Dans toute la suite du problème, on supposera que $a \neq 0$.

* * *

Partie 1

Dans cette partie, on prend a = 1.

1) L'application f_1 de R dans R est-elle injective ?

f_1 est injective si $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$.

$$\frac{u}{1 + |u|} = \frac{v}{1 + |v|}$$

Les dénominateurs étant positifs, cela implique que u et v ont le même signe.

On trouve aisément que pour $u > 0$, on a $u + uv = v + uv$ soit $u = v$; de même pour $u < 0$ ($u - uv = v - uv$).

Et si u = 0, alors v = 0.
L'application f_1 est bien injective.

2) L'application f1 de R dans R est-elle surjective ?
En tant qu'application de R dans R, f1 n'est pas une surjection puisque tout point y n'appartenant pas à E1 n'a pas d'antécédent dans R.
f1 n'est donc pas une bijection de R dans R.

3) Déterminer E_1, image de R par f_1.
Il est évident que f_1 prend ses valeurs sur $]-1, +1[= E_1$, puisque le dénominateur est toujours supérieur au numérateur.
On peut aussi utiliser le fait que $|f_1(x)| \leq 1$ pour montrer que f_1 n'est pas surjective de R dans R.

4) f désigne la restriction de l'application f_1 de R dans E_1.
Montrer que f admet une application inverse, notée $f^{-1} : E_1 \to R$.
Déterminer précisément f^{-1}.
f est bien une bijection de R dans E_1. Il existe donc une application inverse $f^{-1} : E_1 \to R$.
Soit $y > 0$, et donc $y = x/(1 + x)$: $x = y/(1 - y)$.
Pour $x \in [0, 1[$, $f^{-1}(x) = x/(1 - x)$.

De même, pour $y < 0$, $y = x/(1 - x)$ d'où $x = y/(1 + y)$
Pour $x \in]-1, 0]$ $f^{-1}(x) = x/(1 + x)$.

On peut donc écrire que pour tout x dans E_1, $f^{-1}(x) = x/(1 - |x|)$.

5) Etudier la parité/imparité de f ; en déduire l'existence d'éventuels centres ou axes de symétrie pour la courbe C représentant l'application f.
Ecrivons f selon le signe de x.
$x > 0$: $f(x) = x/(1 + x)$
$x < 0$: $f(x) = x/(1 - x)$
Prenons $x > 0$: $f(-x) = -x(1 - x) = - f(x)$ pour $x < 0$.

La fonction f est donc impaire. Elle admet le point (0, 0) comme centre de symétrie.

6) Etudier les limites de f quand x tend vers $+ \infty$ ou $- \infty$.
Il est évident que $\text{Lim}_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et que $\text{Lim}_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

7) Calculer f ' et f '', dérivées première et seconde de f.
Dresser le tableau de variation de f ; tracer l'allure générale du graphe C.
Donner l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 0.
Pour $x > 0$, $f'(x) = 1/(1 + x)^2$
Pour $x < 0$, $f'(x) = 1/(1 - x)^2$
La forme générale de f ' est donc : $f'(x) = 1/(1 + |x|)^2$
f ' est donc strictement positive, f est monotone croissante.

Pour $x > 0$, $f''(x) = - 2/(1 + x)^3$, toujours négative ; f est concave sur R^+
Pour $x < 0$, $f''(x) = 2/(1 - x)^3$, toujours positive ; f est convexe sur R^-

Tableau de variation :

f étant impaire, on peut limiter l'étude à $x > 0$.

x	0	$+\infty$
f'	$+$	
f	$0 \nearrow$	

Cas $x = 0$:

Pour $x = 0$, $f(0) = 0$; la dérivée de f en 0 est la limite quand x tend vers 0 de $(f(x) - f(0))/(x-0)$ soit la limite de $1/(1 + |x|)$. On en déduit que la dérivée de f en 0 est égale à 1.

L'équation de la tangente à C au point (0, 0) est $y = x$ (première bissectrice).

De même, $f''(0)$ est la limite quand x tend vers 0 de $(f'(x) - f'(0))/(x-0) = ((1 + |x|)^{-2} - 1)/x$, qui tend vers l'infini quand x tend vers 0. Donc la dérivée seconde de f n'existe pas en 0.

8) Calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^{+1} f(x)dx$

En décomposant $I = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{x}{1-x}dx + \int_{0}^{+1} \frac{x}{1+x}dx = A + B$

On remarque que $\frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$

$A = -\int_{-1}^{0} 1\,dx + \int_{-1}^{0} \frac{dx}{1-x} = \mathrm{Ln}\,2 - 1$ (le symbole Ln désigne le logarithme népérien).

$B = \int_{0}^{1} 1\,dx - \int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x} = 1 - \mathrm{Ln}2$

D'où $I = 0$

Remarque : le calcul complet de A et B n'était pas nécessaire en raison de la symétrie de f.

Partie 2

Dans cette partie, $a = 2$; soit f_2 l'application associée. E_2 désigne l'image de R par f_2.

$f_2(x) = \frac{x^2}{1+|x|^2}$; $E_2 = [0, 1[$. On remarque que l'on peut écrire simplement $f_2(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

1) f_2 est-elle une bijection de R dans E_2 ? Justifier votre réponse.

Existe-t-il une application inverse f_2^{-1} ?

f_2 n'est pas injective de R dans E_2 puisque à tout point y de [0, 1[sont associées les solutions de l'équation $x^2 - y(1 + x^2) = 0$, ou $x^2(1 - y) = y$, qui admet deux solutions $x_1 = [y(1 - y)^{-1}]^{1/2}$ et $x_2 = - [y(1 - y)^{-1}]^{1/2}$

$f(x_1) = f(x_2)$ et pourtant $x_1 \neq x_2$.

f_2 n'admet donc pas d'application inverse.

2) Etudier la parité/imparité de f2.

On a $f2(-x) = f2(x)$; f2 est paire, l'axe Oy est axe de symétrie.

3) Etudier les limites de f_2 quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

$\mathrm{Lim}_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\mathrm{Lim}_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

4) Calculer f_2' et f_2'', dérivées première et seconde de f_2. Etudier leur signe.
En déduire le tableau de variation de f_2 et tracer l'allure générale du graphe C_2 représentant l'application f_2.
$f_2'(x) = 2x/(1 + x^2)^2$; positive pour $x > 0$, négative pour $x < 0$.
$f_2''(x) = 2(1 - 3x^2)/(1 + x^2)^3$
$f_2''(x) = 0$ pour $x = +- 1/\sqrt{3}$
Il y a changement de concavité en ces points.

Tableau de variation :
Etudions f_2 sur R^+ compte tenu de la symétrie axiale Oy.

x	0		$3^{-1/2}$		$+\infty$
f''		+	0	-	
f'			+		
f	0		$\nearrow$		1

La pente de la tangente au point (0, 0) est nulle. L'axe des abscisses est tangente horizontale.

5) Calculer une primitive F_2 de f_2.
En déduire la valeur de l'intégrale I_2 définie par :

$$I_2 = \int_{-1}^{+1} f_2(x)dx$$

On a : $f_2(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$
$I_2 = \int_{-1}^{+1} dx - \int_{-1}^{+1} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 - \mathrm{Arctan}(1) + \mathrm{Arctan}(-1) = 2 - \pi/2$
$I_2 = (4 - \pi)/2$

Partie 3

On considère ici l'application générale $f_a(x) = \frac{x^a}{1+|x|^a}$ où $a \geq 2$; on note par E_a l'image de R par f_a.

1) Etudier, selon les valeurs de a, si f_a est une bijection de R dans E_a.
Par analogie avec ce qui a été vu dans les parties 1 (a = 1, donc impair) et 2 (a = 2, donc pair), on remarque que l'on peut écrire :

- pour $x > 0$: $f_a(x) = \frac{x^a}{1+x^a}$
- pour $x < 0$: $f_a(x) = \frac{x^a}{1+(-x)^a}$

On en déduit que si a est pair, $f_a(-x) = f_a(x)$ et la fonction f_a est paire ; par contre si a est impair, $f_a(-x) = - f_a(x)$ et elle est impaire.
Il n'y a bijection que si a est impair.

2) Déterminer les limites de f_a quand x tend vers + ∞ ou - ∞.

Pour a pair : $\text{Lim}_{x\to+\infty}$ f(x) = 1 et $\text{Lim}_{x\to-\infty}$ f(x) = 1.

Pour a impair : $\text{Lim}_{x\to+\infty}$ f(x) = 1 et $\text{Lim}_{x\to-\infty}$ f(x) = -1.

On a toujours $f_a(0) = 0$.

3) Calculer f_a' et f_a'', dérivées première et seconde de f_a.

Etudier leur signe.

En déduire le tableau de variation de f_a selon des modalités que l'on précisera.

Calcul de f_a'.

Pour x > 0, $f_a'(x) = ax^{a-1}/(1 + x^a)^2$

Pour x < 0, $f_a'(x) = ax^{a-1}/(1 + (-x)^a)^2$

La forme générique de l'expression est la même, et on peut écrire :

$f_a'(x) = ax^{a-1}/(1 + |x|^a)^2$

Le dénominateur étant toujours positif, le signe de f_a' est celui du numérateur ax^{a-1} : positif pour x > 0 ; par contre pour x < 0, f_a' est positif pour a – 1 pair, c'est-à-dire pour a impair, alors qu'il est négatif pour a – 1 impair et donc a pair.

Le fait que a soit pair ou impair a un impact.

a impair → $f_a' > 0$ pour tout x

a pair → $f_a' > 0$ pour x > 0 et $f_a' < 0$ pour x < 0.

Calcul de f_a''.

Pour x > 0, $f_a''(x) = ax^{a-2}[(a – 1) – (a + 1)\, x^a]/(1 + x^a)^3$

Pour x < 0, $f_a''(x) = ax^{a-2}[(a – 1) – (a + 1)\, (-x)^a]/(1 + (-x)^a)^3$

Pour a > 2, la dérivée seconde s'annule en x = 0 et en $x = [(a-1)/(a+1)]^{1/a} = x_a$ et son symétrique.

Ecriture générale de f_a'' :

$f_a''(x) = ax^{a-2}[(a – 1) – (a + 1)|x|^a]/(1 + |x|^a)^3$

D'après les symétries apparues selon la parité de a (point O pour a impair ; axe Oy pour a pair), il suffit de donner le tableau de variation pour x > 0.

x	0		x_a		+ ∞
f ''	0	+	0	-	
f '			+		
f	0	↗			1

Cas x = 0 :

Pour x = 0, f(0) = 0 ; la dérivée de f en 0 est la limite, quand x tend vers 0, de (f(x) – f(0))/(x-0) soit la limite de $x^{a-1}/(1 + |x|)^a$. Comme a est supérieur ou égal à 2, on en déduit que la dérivée de f en 0 est égale à 0.

De même, f ''(0) est la limite quand x tend vers 0 de $(f'(x) - f'(0))/(x-0) = x^{a-2}/(1 + |x|)^a$.
Pour a = 2, f ''(0) = 1 ; pour a > 2, f''(0) = 0.

4) Quelle est la valeur de la pente de la tangente à C_a, graphe de f_a, au point d'abscisse 0 ?
D'après la question précédente, $f_a'(0) = 0$ pour a > 1.

5) On prend, ici, a = 3 ; on donne $\mathrm{Arctan}(3^{-1/2}) = \pi/6$.
Donner une expression numérique de l'intégrale $I_3 = \int_0^1 f_3(x)dx$.
Indication : par exemple, on pourra décomposer $(1 + x^3)$ en un produit $(a + bx)(c + dx + ex^2)$ où a, b, c, d, e sont des paramètres réels que l'on déterminera, puis mettre $(1 + x^3)^{-1}$ sous la forme d'une somme de deux fractions rationnelles.

Pour x > 0, $f_3(x) = \frac{x^3}{1+x^3}$.

$I_3 = \int_0^1 f_3(x)dx = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^3}dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx = 1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx = 1 - A.$
On a : $1 + x^3 = (1 + x)(1 - x + x^2)$, d'où :

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{b+cx}{1-x+x^2}$$

On en déduit, par identification : a + b = 1, a + c = 0 et a = b + c, système dont la résolution conduit à : a = 1/3, b = 2/3 et c = -1/3.
$A = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x-2}{1-x+x^2}dx = \frac{\mathrm{Ln}2}{3} - \frac{1}{3}B$

Donc $I_3 = 1 - \frac{\mathrm{Ln}2}{3} + \frac{1}{3}B$

$$B = \int_0^1 \frac{x-2}{\frac{3}{4}+(x-1/2)^2}dx$$

$$B = \int_0^1 \frac{x-2}{\frac{3}{4}+(x-1/2)^2}dx = \int_0^1 \frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}+(x-1/2)^2}dx = \int_0^1 \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}+(x-1/2)^2}dx - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\frac{3}{4}+(x-1/2)^2} = C - \frac{3D}{2}$$

$C = \int_0^1 \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}+(x-1/2)^2}dx$;

Posons $u = \frac{3}{4} + (x-1/2)^2$; du = 2(x – ½)dx ; x = 0 -> u = 1, x = 1 -> u = 1

$$C = \frac{1}{2}\int_1^1 \frac{du}{u} = 0$$

Donc $I_3 = 1 - \frac{\mathrm{Ln}2}{3} - \frac{1}{2}D$

$$D = \int_0^1 \frac{dx}{\frac{3}{4}+(x-1/2)^2} = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{dx}{[1+4(x-1/2)^2/3]}$$

Posons v = $\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}$, dv = $\frac{2dx}{\sqrt{3}}$; D = $\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{\frac{-1}{\sqrt{3}}}^{\frac{+1}{\sqrt{3}}}\frac{dv}{v^2+1}$ = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ [Arctan$(1/\sqrt{3})$ − Arctan$(-1/\sqrt{3})$]

Donc D = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ [2 Arctan$(1/\sqrt{3})$ − 1]

On en déduit : I_3 = 1 – (Ln2)/3 + 1/$\sqrt{3}$ - 2 [Arctan$(1/\sqrt{3})$]/ $\sqrt{3}$

La valeur approchée numérique est $I_3 \approx$ 1 – 0,231 + 0,577 – 0,604 = 0,742

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est composée de cinq énoncés indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice 1 :

E_3 est l'espace vectoriel des polynômes, à une indéterminée réelle, dont le degré est inférieur ou égal à 3.
On définit sur E_3 l'application h qui, à tout polynôme P de E_3, associe h(P) définie par :

$$\forall\, P \in E_3,\ h(P) = P + (1 - x)P'$$

où x est l'indéterminée et P' la dérivée première du polynôme P.

1) Montrer que h est une application linéaire de E_3 dans E_3.
Soit P de degré inférieur ou égal à 3. P' est de degré inférieur ou égal à 2, donc $(1 - x)P'$ est de degré inférieur ou égal à 3, et h(P) aussi.
h est bien une application de E_3 dans E_3.
Linéarité :
Il est évident que si λ est un réel, $h(\lambda P) = \lambda h(P)$ et que si Q est un polynôme de E_3, $h(P + Q) = h(P) + h(Q)$.

2) La base usuelle B de E_3 est constituée des polynômes 1, x, x^2, x^3.
Donner l'image par h de chaque polynôme de la base B.
Soit P = 1 : $h(1) = 1 + (1 - x)0 = 1$
$h(x) = x + (1 - x)1 = 1$
$h(x^2) = x^2 + (1 - x)(2x) = - x^2 + 2x$
$h(x^3) = x^3 + (1 - x)(3x^2) = - 2x^3 + 3x^2$

3) Soit F = Ker h, noyau de l'application h.
Déterminer F.

On rappelle que le noyau d'une application linéaire h est l'ensemble des polynômes P tels que h(P) = 0.
Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$P(x) + (1 - x)P'(x) = -2ax^3 + (3a - b)x^2 + 2bx + c + d = 0$
D'où : a = 0, b = 0, d = - c.
Le noyau de h est l'ensemble des polynômes $c(x - 1)$.

Exercice 2 :

On considère le système linéaire (S) de trois équations à trois inconnues x, y et z :

$$(S)\begin{cases} 4x + 3y + 6z = 1 \\ x + y + 2z = -1 \\ -3x - 3y - 5z = 2 \end{cases}$$

1) On veut exprimer (S) sous forme matricielle. Quelle est la matrice A associée à ce système ?
La matrice A est :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Soit X le vecteur des inconnues $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et C le vecteur des constantes $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Le système (S) s'écrit matriciellement : AX = C

2) Calculer le déterminant de A.
Le déterminant de A est égal à 1 ; A est donc inversible.

3) Calculer A^2 et A^3.
Le calcul direct A.A permet d'établir :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^3 = I$, matrice identité de dimension 3

4) En déduire que A est inversible ; donner l'expression de A^{-1}, matrice inverse de A.
$A^3 = I = A.A^2 = A^2.A$; A est donc inversible et $A^{-1} = A^2$

5) Résoudre le système (S).
On en déduit : $X = A^{-1}C$ d'où x = 4, y = -3, z = -1.

Exercice 3 :

On se place dans l'espace F_3 des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients réels.
On donne les deux matrices I et J :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit la matrice M de F_3, où a et b sont deux réels fixés :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

1) Ecrire M comme une combinaison linéaire de I et J.

$M = aI + bJ$

2) Calculer les matrices J^2, J^3, J^n pour $n > 3$.

$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$

On en déduit que $J^n = 0$ pour tout $n \geq 3$.

3) En utilisant la formule du développement du binôme, expliciter la matrice M^n.

Par le développement du binôme de Newton appliqué à $M^n = (aI + bJ)^n$, et compte tenu que I et J commutent et que $J^n = 0$ pour $n \geq 3$, on obtient :

$M^n = a^n I^n + C_n^1 a^{n-1} b I^{n-1} J + C_n^2 a^{n-2} b^2 I^{n-2} J^2 = a^n I + n a^{n-1} b J + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 J^2$

Il s'en suit :

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & n a^{n-1} b & \frac{n(n-1) a^{n-2}}{2} b^2 \\ 0 & a^n & n a^{n-1} b \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$$

Exercice 4 :

On considère le polynôme $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$, où $n \in N$, $n \geq 1$ et $x \in R^+$.

1) Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une solution et une seule dans R^+, notée u_n.

$P_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 1$ est positif puisque $x \geq 0$.

La fonction polynôme définie par P_n est donc continue et monotone croissante de – 1 (pour x = 0) à $+\infty$.

Il existe donc une et une seule valeur u_n telle que $P(u_n) = 0$.

2) Montrer que la suite (u_n), $n \geq 1$, est décroissante.

En déduire que la suite (u_n) converge.

On a : $P_{n+1}(u_n) = (u_n)^{n+1} + P_n(u_n) = (u_n)^{n+1} > 0$

Or $0 = P_{n+1}(u_{n+1})$, d'où $P_{n+1}(u_n) > P_{n+1}(u_{n+1})$

Comme P_{n+1} est monotone continue croissante, on en déduit $u_{n+1} < u_n$

La suite (u_n), $n \geq 1$, est décroissante.

Elle est en outre minorée par 0 (puisque $x \geq 0$).

On en déduit qu'elle est convergente.

3) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \frac{1}{2}$.

Dans l'écriture de $P_n(x)$, on reconnait la somme $x^n + x^{n-1} + \dots + x = x(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1) = x(1 - x^n)/(1 - x)$.

On peut donc écrire :

$P_n(x) = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} - 1 = \frac{2x - 1 - x^{n+1}}{1-x}$

On constate que $P_n(1/2) = -2(1/2)^{n+1}$ est < 0. Comme P_n est croissante et que $P_n(u_n) = 0$, on en conclut que $u_n \geq 1/2$ pour tout n.

4) Soit r un nombre réel tel que $\frac{1}{2} < r < 1$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P_n(r) > 0$.

Soit donc un réel r vérifiant $\frac{1}{2} < r < 1$.

Quand $n \to +\infty$, $P_n(r) = \frac{2r - 1 - r^{n+1}}{1-r}$ tend vers $(2r-1)/(1 - r)$ qui est positif.

5) En déduire que la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Ainsi, toujours par croissance de P_n, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a :
$1/2 \leq u_n \leq r$.

Donc u_n converge vers 1/2.

Exercice 5 :

On rappelle que la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue X, à valeurs réelles, est définie par sa fonction de répartition $F(x) = P(X \leq x)$, $x \in R$, ou sa densité $f(x)$.

Dans cet exercice, on suppose que X est une variable aléatoire continue positive dont la densité $f : R \to R$, est continue et non-nulle sur un intervalle de la forme $]0, x_1[$ avec x_1 strictement positif ou $x_1 = +\infty$, et nulle sur l'intervalle $[x_1, +\infty[$.

On définit la *fonction de hasard* de X, notée a, par :

$$a(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$$

pour $x \in [0, x_1[$.

On rappelle en outre que, pour $x \in]0, x_1[$, on a : F dérivable en x et $F'(x) = f(x)$.

1) On pose $A(x) = \int_0^x a(t)dt$

Exprimer la forme générale de la fonction de répartition F en fonction de A.

$a(x) = F'(x)/(1 - F(x))$

En posant $u = 1 - F$, $a = -u'/u$, d'où $-\text{Ln}(1 - F(x)) = \int_0^x a(t)dt \rightarrow 1 - F(x) = e^{-\int_0^x a(t)dt}$.

Ce qui conduit à la forme générale : $F(x) = 1 - e^{-\int_0^x a(t)dt} = 1 - e^{-A(x)}$

2) Identifier les lois de probabilité admettant une fonction de hasard constante.

Supposons que a(x) soit une constante, notée a ; $a \geq 0$.

Alors $a(x) = ax$, et la classe de fonctions de répartition associée est $F(x) = 1 - e^{ax}$.

3) Calculer la fonction de hasard d'une v.a. X suivant la loi définie par la densité :

$$f(x) = a.b.x^{a-1}.\exp(-bx^a)$$

avec $x > 0$, a et b deux réels strictement positifs, et où le symbole exp désigne l'exponentielle.

En posant $v = bx^a$, on a $dv = abx^{a-1}dx$, et donc $F(x) = 1 - \exp(-bx^a)$.
On déduit : $a(x) = a.b.x^{a-1}.\exp(-bx^a) / \exp(-bx^a) = abx^{a-1}$.

4) Calculer la fonction de hasard d'une v.a. X suivant une loi de densité :

$$f(x) = a.\exp\{x - a(e^x - 1)\}$$

avec $x > 0$ et $a > 0$.
On a : $f(x) = a.\exp\{x - a(e^x - 1)\} = ae^x\exp(-a(e^x-1))$
En posant $v = a(e^x - 1)$, on $dv = ae^x dx$ et donc $F(x) = 1 - \exp(-a(e^x - 1))$
La fonction de hasard est $a(x) = ae^x\exp(-a(e^x-1))/ \exp(-a(e^x - 1))$
D'où $a(x) = ae^x$.