ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Dans quelle mesure les pandémies sont-elles révélatrices des fragilités et des forces de nos sociétés ?

Sujet n° 2

Cuisiner, n'est-ce que préparer à manger ?

Sujet n° 3

Devrait-on restituer systématiquement à leurs pays d'origine les œuvres d'art qui sont dans des musées à l'étranger ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve comporte deux exercices et un problème, indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice 1

On définit la relation binaire notée * sur R^2 par :

$$(x, y) * (a, b) \Longleftrightarrow yx^2 \leq ba^2$$

1) Rappeler les définitions des relations d'équivalence et d'ordre.
2) La relation * est-elle une relation d'ordre ? Justifier précisément votre réponse.

Exercice 2

1) Soit E l'ensemble des points M de R^2 de coordonnées (x, y) vérifiant le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ -2x + 2y \leq 3 \\ 2x + 2y \leq 15 \\ 4x - 2y \leq 13 \end{cases}$$

Représenter graphiquement E.
2) On considère la famille de droites d'équations $x + 2y = m$, où m est un paramètre réel.
Déterminer le point de E pour lequel $x + 2y$ est maximum, et déterminer cette valeur maximale.

Problème

On rappelle que :

- Le symbole Ln désigne le logarithme népérien
- Le symbole $|\,.\,|$ désigne la valeur absolue
- L'inverse de la fonction tangente, notée tan, est la fonction « Arc tangente », notée Arctan : y = Arctan(x) signifie que x = tan y. La dérivée de Arctan(x) est $1/(1 + x^2)$.

* * *

On considère l'application f_a, de R dans R, définie par :

$$f_a : x \in R \rightarrow f_a(x) = \frac{x^a}{1+ |x|^a}$$

où a est un entier naturel.
Question préliminaire : étudier le cas particulier a = 0.

Dans toute la suite du problème, on supposera que $a \neq 0$.

Partie 1

Dans cette partie, on prend a = 1.

1) L'application f_1 de R dans R est-elle injective ?
2) L'application f_1 de R dans R est-elle surjective ?
3) Déterminer E_1, image de R par f_1.
4) f désigne la restriction de l'application f_1 de R dans E_1.
Montrer que f admet une application inverse, notée $f^{-1} : E_1 \rightarrow R$.
Déterminer précisément f^{-1}.
5) Etudier la parité/imparité de f ; en déduire l'existence d'éventuels centres ou axes de symétrie pour la courbe C représentant l'application f.
6) Etudier les limites de f quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
7) Calculer f ' et f '', dérivées première et seconde de f.
Dresser le tableau de variation de f ; tracer l'allure générale du graphe C.
Donner l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 0.
8) Calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^{+1} f(x)dx$

Partie 2

Dans cette partie, a = 2 ; soit f_2 l'application associée. E_2 désigne l'image de R par f_2.

1) f_2 est-elle une bijection de R dans E_2 ? Justifier votre réponse.
Existe-t-il une application inverse f_2^{-1} ?
2) Etudier la parité/imparité de f_2.
3) Etudier les limites de f_2 quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
4) Calculer f_2' et f_2'', dérivées première et seconde de f_2. Etudier leur signe.

En déduire le tableau de variation de f_2 et tracer l'allure générale du graphe C_2 représentant l'application f_2.

5) Calculer une primitive F_2 de f_2.

En déduire la valeur de l'intégrale I_2 définie par :

$$I_2 = \int_{-1}^{+1} f_2(x)dx$$

Partie 3

On considère ici l'application générale $f_a(x) = \frac{x^a}{1+|x|^a}$ où $a \geq 2$; on note par E_a l'image de R par f_a.

1) Etudier, selon les valeurs de a, si f_a est une bijection de R dans E_a.

2) Déterminer les limites de f_a quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

3) Calculer f_a' et f_a'', dérivées première et seconde de f_a.

Etudier leur signe.

En déduire le tableau de variation de f_a selon des modalités que l'on précisera.

4) Quelle est la valeur de la pente de la tangente à C_a, graphe de f_a, au point d'abscisse 0 ?

5) On prend, ici, a = 3 ; on donne $\mathrm{Arctan}(3^{-1/2}) = \pi/6$.

Donner une expression numérique de l'intégrale $I_3 = \int_0^1 f_3(x)dx$.

Indication : par exemple, on pourra décomposer $(1 + x^3)$ en un produit $(a + bx)(c + dx + ex^2)$ où a, b, c, d, e sont des paramètres réels que l'on déterminera, puis mettre $(1 + x^3)^{-1}$ sous la forme d'une somme de deux fractions rationnelles.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet 1

Les ressources naturelles peuvent-elles et doivent-elles être gérées comme des biens publics mondiaux ?

Sujet 2

Le progrès technique nuit-il à l'emploi ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de cinq énoncés indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice 1 :

E_3 est l'espace vectoriel des polynômes, à une indéterminée réelle, dont le degré est inférieur ou égal à 3.
On définit sur E_3 l'application h qui, à tout polynôme P de E_3, associe h(P) définie par :

$$\forall\ P \in E_3,\ h(P) = P + (1 - x)P'$$

où x est l'indéterminée et P' la dérivée première du polynôme P.

1) Montrer que h est une application linéaire de E_3 dans E_3.
2) La base usuelle B de E_3 est constituée des polynômes 1, x, x^2, x^3.
Donner l'image par h de chaque polynôme de la base B.
3) Soit F = Ker h, noyau de l'application h.
Déterminer F.

Exercice 2 :

On considère le système linéaire (S) de trois équations à trois inconnues x, y et z :

$$(S)\begin{cases} 4x + 3y + 6z = 1 \\ x + y + 2z = -1 \\ -3x - 3y - 5z = 2 \end{cases}$$

1) On veut exprimer (S) sous forme matricielle. Quelle est la matrice A associée à ce système ?
2) Calculer le déterminant de A.
3) Calculer A^2 et A^3.
4) En déduire que A est inversible ; donner l'expression de A^{-1}, matrice inverse de A.
5) Résoudre le système (S).

Exercice 3 :

On se place dans l'espace F_3 des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients réels.
On donne les deux matrices I et J :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit la matrice M de F_3, où a et b sont deux réels fixés :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

1) Ecrire M comme une combinaison linéaire de I et J.
2) Calculer les matrices J^2, J^3, J^n pour $n > 3$.
3) En utilisant la formule du développement du binôme, expliciter la matrice M^n.

Exercice 4 :

On considère le polynôme $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$, où $n \in N$, $n \geq 1$, et $x \in R^+$.
1) Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une solution et une seule dans R^+, notée u_n.
2) Montrer que la suite (u_n), $n \geq 1$, est décroissante.
En déduire que la suite (u_n) converge.
3) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \frac{1}{2}$.
4) Soit r un nombre réel tel que $\frac{1}{2} < r < 1$.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P_n(r) > 0$.
5) En déduire que la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 5 :

On rappelle que la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue X, à valeurs réelles, est définie par sa fonction de répartition $F(x) = P(X \leq x)$, $x \in R$, ou sa densité $f(x)$.

Dans cet exercice, on suppose que X est une variable aléatoire continue positive dont la densité $f : R \rightarrow R$, est continue et non-nulle sur un intervalle de la forme $]0, x_1[$ avec x_1 strictement positif ou $x_1 = +\infty$, et nulle sur l'intervalle $[x_1, +\infty[$.

On définit la *fonction de hasard* de X, notée a, par :

$$a(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$$

pour $x \in [0, x_1[$.
On rappelle en outre que, pour $x \in]0, x_1[$, on a : F dérivable en x et $F'(x) = f(x)$.

1) On pose $A(x) = \int_0^x a(t)dt$
Exprimer la forme générale de la fonction de répartition F en fonction de A.
2) Identifier les lois de probabilité admettant une fonction de hasard constante.
3) Calculer la fonction de hasard d'une v.a. X suivant la loi définie par la densité :

$$f(x) = a.b.x^{a-1}.\exp(-bx^a)$$

avec $x > 0$, a et b deux réels strictement positifs, et où le symbole exp désigne l'exponentielle.
4) Calculer la fonction de hasard d'une v.a. X suivant une loi de densité :

$$f(x) = a.\exp\{x - a(e^x - 1)\}$$

avec $x > 0$ et $a > 0$.