

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Faire nation. Que pensez-vous de cette expression ? Vous illustrerez vos propos.

Sujet n° 2

« *L'anarchie c'est l'ordre par harmonie* », Louise Michel, (1830-1905), institutrice, femme politique française, *Prise de possession*, 1890. Expliquez et argumentez.

Sujet n° 3

Peut-on échapper à sa culture ? Discutez et illustrez vos propos.

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Le but du problème est d'étudier l'approximation de solutions d'équations différentielles par des suites numériques.

Partie I

Soit x_0 un réel fixé, et $T > 0$ un réel strictement positif.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$y'(t) = -2y(t)$$

en la variable $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, partant de la condition initiale $y(0) = x_0$.

2. Soit $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Résoudre l'équation différentielle

$$y'(t) = -2y(t) + h(t) \tag{1}$$

en la variable $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, partant de la condition initiale $y(0) = x_0$.

3. Montrer que la solution y de l'équation différentielle (1) est de classe $\mathcal{C}^1(]0, T[; \mathbb{R})$.

4. Montrer que la dérivée y' de la solution y de l'équation différentielle (1) est une fonction bornée.

5. Soit

$$F : \begin{array}{l} [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) \mapsto F(t, x) \end{array}$$

une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ telle que toutes ses dérivées partielles soient bornées. Montrer que la fonction F est globalement Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que pour tout $t \in [0, T]$, pour tous $y, z \in \mathbb{R}$

$$|F(t, y) - F(t, z)| \leq M|y - z|.$$

6. Rappeler pourquoi il existe une unique solution à l'équation différentielle ordinaire suivante

$$y'(t) = F(t, y(t)) \tag{2}$$

partant de la condition initiale $y(0) = x_0$.

7. Montrer que la solution y de l'équation différentielle (5) est de classe $\mathcal{C}^2(]0, T[; \mathbb{R})$.

8. Soit $z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction continue vérifiant l'équation intégrale suivante pour tout $t \in [0, T]$

$$z(t) = x_0 + \int_0^t F(s, z(s)) ds. \tag{3}$$

Montrer que la fonction z est de classe $\mathcal{C}^1(]0, T[; \mathbb{R})$.

9. Montrer que pour tout $t \in [0, T]$, il existe un réel $a \in [0, T]$ (dépendant de t) tel que

$$\int_0^t F(s, z(s)) ds = F(a, z(a)) \times t.$$

10. Montrer que pour tous $s, t \in [0, T]$, on a le développement limité suivant pour y la solution de l'équation différentielle (5)

$$y(t) = y(s) + F(s, y(s))(t-s) + \left(\frac{\partial F}{\partial t}(s, y(s)) + \frac{\partial F}{\partial x}(s, y(s))F(s, y(s)) \right) \frac{(t-s)^2}{2} + O((t-s)^2)$$

où $O((t-s)^2)$ est une fonction telle que $\frac{O((t-s)^2)}{(t-s)^2}$ est bornée quand $s \rightarrow t$.

Partie II

On considère une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ notée

$$F : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) \mapsto F(t, x) \end{array}$$

On suppose dans cette partie qu'il existe une constante $M > 0$ telle que les dérivées partielles de la fonction F sont bornées par cette constante, c'est-à-dire

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) \right| \leq M \quad \text{et} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) \right| \leq M.$$

Soit $T > 0$ un réel strictement positif et N un entier strictement positif avec $h = T/N$. Soit x_0 un réel fixé, et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$x_{n+1} = x_n + hF(nh, x_n), \quad (4)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11. Uniquement pour cette question, on suppose que F est une fonction bornée. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n := \frac{x_n}{n+1}$. Montrer que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

12. La fonction F n'étant plus supposée bornée, on ne peut pas appliquer la question précédente, et on ne sait a priori rien dire sur la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Trouver une fonction F non bornée (mais dont les dérivées partielles sont bornées) telle que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit pas bornée (on précisera une valeur pour x_0 si besoin).

13. Montrer que $\exp(x) - x - 1$ est positif pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

14. Soit $L > 0$, soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de termes positifs, et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq y_{n+1} \leq (1 + L)y_n + b_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$y_n \leq y_0 \exp(Ln) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \exp(L(n-1-k)).$$

15. Soit $D > 0$, soit $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$d_n = \sum_{k=0}^{n-1} Dk \exp(-kD).$$

Montrer qu'il existe une constante $E > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|d_n| \leq E$.

16. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie qu'il existe trois constantes K_1 , K_2 et K_3 telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|x_{n+1}| \leq (1 + K_1)|x_n| + K_2n + K_3.$$

17. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n := \exp\left(-\frac{MT}{N}\right)^n x_n$. Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Partie III

Dans cette partie, on continue de considérer la fonction F de la partie II, et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De plus, on note y la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$y'(t) = F(t, y(t)) \quad (5)$$

partant de la condition initiale $y(0) = x_0$ sur l'intervalle $[0, T]$

18. Montrer que pour tout $0 < s < t < T$, il existe $\xi \in [s, t]$ tel que

$$y(t) = y(s) + F(s, y(s))(t - s) + y''(\xi) \frac{(t - s)^2}{2}.$$

19. Montrer qu'il existe une constante $Q > 0$ telle que pour tout $0 < s < t < T$,

$$|y(t) - y(s) - F(s, y(s))(t - s)| \leq Q \frac{(t - s)^2}{2}.$$

20. En déduire que pour tout entier $0 \leq n < N$, on a

$$|x_{n+1} - y((n + 1)h)| \leq |x_n - y(nh)|(1 + Mh) + Q \frac{h^2}{2},$$

avec M la constante introduite en partie II.

21. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un entier N^* tel que si $N > N^*$ alors pour tout entier $0 \leq n < N$, on a

$$|x_{n+1} - y((n + 1)h)| \leq |x_n - y(nh)|(1 + \varepsilon) + \varepsilon h.$$

22. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un entier N^* tel que si $N > N^*$ alors

$$\sup_{0 \leq n \leq N} |x_n - y(nh)| \leq \varepsilon \frac{T}{N} \frac{1 - \exp(\varepsilon N)}{1 - \exp(\varepsilon)}.$$

23. L'estimation précédente n'admet pas de limite finie quand N tend vers $+\infty$. On va essayer d'améliorer les résultats. Montrer que

$$\sup_{0 \leq n \leq N} |x_n - y(nh)| \leq \frac{Qh^2}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \exp(MkT/N).$$

24. Montrer qu'il existe une constante C et un entier N^* tel que si $N > N^*$ alors

$$\frac{QT}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp(MkT/N) \leq C.$$

25. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un entier N^* tel que si $N > N^*$ alors on a

$$\sup_{0 \leq n \leq N} |x_n - y(nh)| \leq \varepsilon.$$

26. Pour N choisi, on pose x'_N le N -ième terme de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construite pour ce choix de N . Montrer que la limite de x'_N quand $N \rightarrow +\infty$ est $y(T)$.

2 Problème d'algèbre

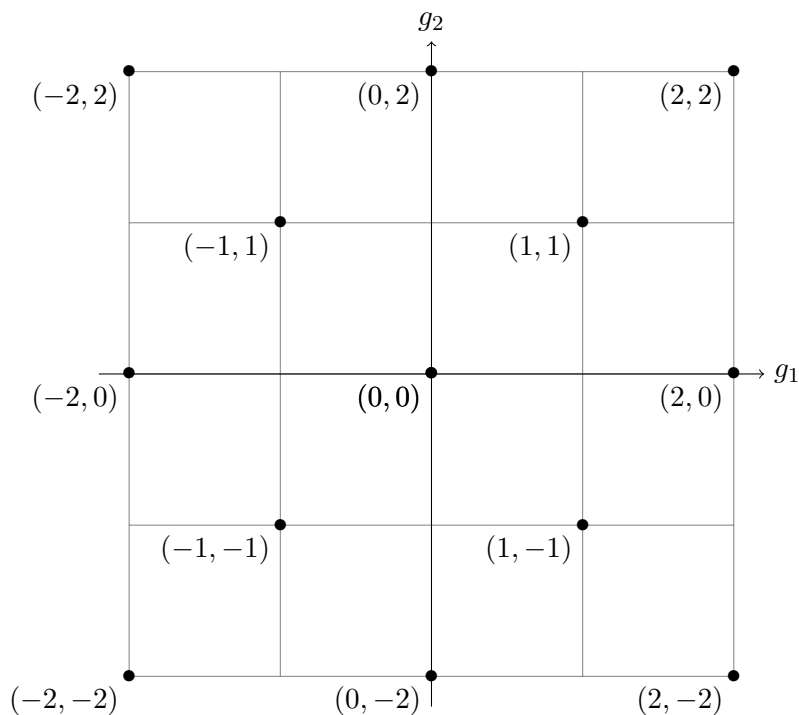
Dans ce problème, on considère des sous-groupes de \mathbb{Z}^2 , et certains maillages générés par des bases d'éléments. On cherche notamment à caractériser les morphismes de ces maillages.

Partie I

On pose $G = \{g = (g_1, g_2) \in \mathbb{Z}^2 : g_1 + g_2 = 0 \pmod{2}\}$. On rappelle que la notation $\pmod{2}$ dans l'expression $g_1 + g_2 = 0 \pmod{2}$ signifie que 2 divise l'entier $g_1 + g_2$. Notamment si $g_1 + g_2 = 1 \pmod{2}$ c'est que 2 ne divise pas l'entier $g_1 + g_2$. Plus simplement on pourrait écrire

$$G = \{g = (g_1, g_2) \in \mathbb{Z}^2 : g_1 + g_2 \text{ est un entier pair}\}$$

qui est l'ensemble composé de couple de coordonnées cartésiennes entières telles que leur somme soit paire. Une représentation schématique de cet ensemble est donnée ci-dessous.



Pour élément $g = (g_1, g_2)$ et $h = (h_1, h_2) \in G$, on note $g + h$ le couple $(g_1 + h_1, g_2 + h_2)$.

Pour élément $g = (g_1, g_2)$ et $h = (h_1, h_2) \in G$, on note $g \star h$ le couple $(g_1 h_1, g_2 h_2)$.

Pour tout élément $n \in \mathbb{Z}$, et tout élément $g = (g_1, g_2) \in G$, on note $n \cdot g$ le couple (ng_1, ng_2) .

1. Montrer que $(G, +)$ est un groupe.
2. Montrer que pour tout élément $n \in \mathbb{Z}$, et tout élément $g = (g_1, g_2) \in G$, alors $n \cdot g$ est dans G .

3. Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible.

4. En déduire qu'il existe deux éléments u et $v \in G$ tel que pour tout $g \in G$, il existe m et $n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$g = mu + nv.$$

5. Montrer que $(G, +, \star)$ est un anneau commutatif.

6. Montrer que G possède un sous-anneau non trivial, c'est-à-dire qu'il existe un sous-anneau H tel que $(0, 0) \notin H \subsetneq G$.

Partie II

On rappelle qu'un idéal I d'un anneau commutatif G est un sous-groupe additif tel que

$$\forall g \in G, \quad \forall i \in I, \quad g \star i \in I.$$

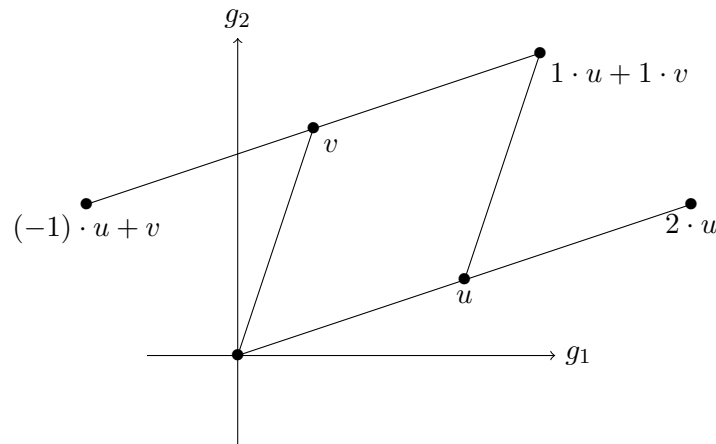
Pour $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ deux éléments de G (i.e. $u_1 + u_2 = 0 \pmod{2}$ et $v_1 + v_2 = 0 \pmod{2}$), on note

$$I[u] := \{g \in G : \text{Il existe } m \in \mathbb{Z} \text{ tel que } g = m \cdot u\}$$

et

$$I[u, v] = \{g \in G : \text{Il existe } m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{Z} \text{ tels que } g = m \cdot u + n \cdot v\}$$

deux sous-ensembles particuliers de G qu'on se propose d'étudier. Une représentation schématique de $I[u]$ et $I[u, v]$ est donnée ci-dessous.



7. Vérifier que $I[u]$ et $I[u, v]$ sont bien des sous-ensembles de G .

8. Montrer que l'ensemble $I[u]$ est un sous-groupe additif de G .
9. Montrer que l'ensemble $I[u, v]$ est un sous-groupe additif de G .
10. Trouver un élément $u \in G$ tel que $I[u]$ ne soit pas un sous-anneau de G .
11. Montrer que l'ensemble $I[u]$ est un idéal si et seulement si $u_1 = 0$ ou $u_2 = 0$.
12. Soient u et v deux éléments de G non colinéaires, c'est-à-dire que si $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ alors $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$. On suppose que $1/(u_1v_2 - u_2v_1) \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble $I[u, v]$ est un sous-anneau de G .
13. Sous les mêmes conditions que la question précédente, montrer que $I[u, v]$ est un idéal de G .
14. Soient u et v deux éléments de G tels que $(u_1v_2 - u_2v_1) = 2$. Montrer que l'ensemble $I[u, v]$ est un sous-anneau de G .
15. Sous les mêmes conditions que la question précédente, montrer que $I[u, v]$ est un idéal de G .

Partie III

Dans cette partie, on considère deux éléments fixés $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ de G tels que $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$, et on considère encore le sous-groupe additif

$$I[u, v] = \{g \in G : \text{Il existe } m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{Z} \text{ tels que } g = m \cdot u + n \cdot v\}.$$

On note GL_2 le groupe de transformations linéaires inversibles de \mathbb{R}^2 défini par

$$GL_2 := \left\{ P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

et on note O_2 le groupe de transformations orthogonales de \mathbb{R}^2 défini par

$$O_2 := \left\{ P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2 : PP^T = P^T P = Id \right\}$$

où P^T est la matrice transposée de P et Id est la matrice identité. Pour un élément P de GL_2 ou de O_2 , et un élément $g \in G$ on note Pg le couple $(ag_1 + bg_2, cg_1 + dg_2) \in \mathbb{R}^2$.

16. Vérifier que GL_2 forme un groupe pour la loi de multiplication.
17. Vérifier que O_2 est un sous-groupe de GL_2 pour la loi de multiplication.

18. On note $Aut(I[u, v])$ l'ensemble des matrices P de O_2 tels que pour tout $g \in I[u, v]$, on a Pg et $P^T g$ qui sont encore dans $I[u, v]$. Soit $P \in Aut(I[u, v])$, montrer que l'application \mathcal{P} suivante est un morphisme de groupe additif de $I[u, v]$.

$$\mathcal{P} : \begin{array}{ccc} I[u, v] & \rightarrow & I[u, v] \\ g = m \cdot u + n \cdot v & \mapsto & \mathcal{P}(g) = Pg \end{array}$$

On identifiera donc la matrice P avec l'application \mathcal{P} dans le reste du problème.

19. Montrer que l'ensemble $Aut(I[u, v])$ est un sous-groupe de O_2 pour la loi de multiplication.
 20. Montrer que pour tout $P \in Aut(I[u, v])$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ ou } P = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

21. Soit $P \in Aut(I[u, v])$, en montrant que $P^{-1}u + Pu$ est un élément de $I[u, v]$, en déduire que la trace de P est un entier.
 22. Soit P un élément de $Aut(I[u, v])$ de déterminant 1. Montrer qu'il existe au maximum 8 valeurs possibles dans $] -\pi, \pi]$ pour α dans l'écriture proposée en question 20, précisément que seuls les angles $\left\{ 0, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{2\pi}{3}, \pi \right\}$ sont autorisés.
 23. Supposons qu'il existe un élément $P \in Aut(I[u, v])$ de déterminant égal à 1, tel que $Tr(P) = 1$. Montrer qu'il existe une contradiction.
 24. Montrer que pour tout $u, v \in G$, les angles 0 et π sont autorisés, c'est-à-dire que les éléments

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sont des éléments de $Aut(I[u, v])$.

25. Montrer qu'il existe deux éléments $u, v \in G$, tels que la rotation d'angle $\pi/2$ n'est pas autorisée comme transformation préservant $I[u, v]$.
 26. Soit $g \in I[u, v]$ non nul, montrer que

$$\max(|g_1 v_2 - g_2 v_1|, |g_1 u_2 - g_2 u_1|) \geq u_1 v_2 - u_2 v_1$$

27. Montrer qu'il existe ε tel que la norme $\|g\| := \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$ de tout élément $g \in I[u, v]$ non nul vérifie $\|g\| > \varepsilon$.

28. Soit $\delta = \min\{\|g\| \in \mathbb{R} : g \in I[u, v], g \neq 0\}$. Montrer qu'il existe un nombre fini d'éléments qui soient de norme δ .
29. Conclure qu'il existe un nombre pair d'éléments de norme minimale non nulle.

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, N désigne l'ensemble des entiers naturels, R l'ensemble des nombres réels, e le nombre de Néper et \ln le logarithme népérien.

Exercice n° 1

On considère l'espace vectoriel R^4 rapporté à la base canonique. Soit f l'endomorphisme de

R^4 représenté par la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer l'image de f .
2. Etudier la diagonalisation de f (on déterminera les valeurs propres et des vecteurs propres pour la valeur propre double).
3. Soit q la forme quadratique sur R^4 définie par :
 $q(x, y, z, t) = 4z^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 4yz + 4zt$. Cette forme quadratique est-elle positive ?
4. Résoudre le système suivant, où m et p sont des paramètres réels :

$$\begin{cases} y + z + t = 1 \\ x + 2z = m^2 + 1 \\ x + 2y + 4z + 2t = p + 2 \\ x + (m - 1)y + 2z = 2 \end{cases}$$

Exercice n° 2

On note E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, puis $S = \{M \in E / M = M'\}$ et $A = \{M \in E / M = -M'\}$, où M' désigne la matrice transposée.

1. Déterminer la dimension de S et celle de A .
2. Montrer que E est la somme directe de S et A .
3. Soit $M \in A$, étudier la diagonalisation de M dans R et dans C (ensemble des nombres complexes).
4. Soit la matrice particulière

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de vecteurs propres complexes de M . Indiquer comment calculer M^n pour n entier supérieur à 1 (le calcul explicite n'est pas demandé).

Exercice n° 3

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de R^3 muni du produit scalaire standard. On note D la droite vectorielle engendrée par le vecteur e_1 et E l'orthogonal de D .

1. Déterminer les matrices des endomorphismes de R^3 suivants dans la base B :
 - Rotation autour de D et d'angle α . On notera R cette matrice. (On rappelle qu'une matrice de rotation est une matrice orthogonale de déterminant égal à 1).
 - Projection orthogonale sur D . On notera P_1 cette matrice.
 - Projection orthogonale sur E . On notera P_2 cette matrice.

2. Exprimer R à l'aide de P_1, P_2 et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la nature géométrique de l'application linéaire associée à M ?

3. Exprimer $\cos \alpha$ en fonction de la trace de R .

Exprimer M en fonction de R, R' (transposée de R) et α pour $\alpha \neq k\pi (k \in Z)$.

4. Soient u et v deux rotations de R^3 . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $uov = vou$

(ii) u et v ont les mêmes vecteurs invariants **ou** u et v sont des symétries par rapport à deux droites orthogonales.

Exercice n° 4

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en zéro.
2. Donner un développement limité de f à l'ordre 4 au voisinage de zéro. On écrira f sous la forme $f(x) = \sum_{p \geq 0} B_p \frac{x^p}{p!}$. Que valent B_0, \dots, B_4 ?
3. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
4. Calculer $I = \int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx$.

Exercice n° 5

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = x^2 \operatorname{Ln}(1+x^2)$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
2. Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ et le premier terme $u_0 > 0$.
3. Calculer $I = \int_0^1 f(x) dx$.

Exercice n° 6

1. En se servant du développement en série entière de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{1-x}$, calculer pour $0 < x < 1$, la somme des séries $\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1}$
2. Soit n un entier naturel non nul fixé. Calculer le développement en série entière de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{(1-x)^n}$ et en déduire la somme de la série : $\sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k x^k$, où C_n^p désigne le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n .

AVRIL 2022

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le texte ci-après de Clément Mweyang Aapengnuo a été publié dans le bulletin de la sécurité africaine en avril 2010.

Il doit être résumé en 200 mots (plus ou moins 10%). Vous indiquerez en fin de copie le nombre de mots utilisés.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.

La mauvaise interprétation des conflits ethniques en Afrique

L'Afrique est souvent perçue comme un continent pris dans une spirale sans fin de violences ethniques. Le génocide au Rwanda, les cas du Darfour, du Nord du Nigéria, de la Côte d'Ivoire, et les lendemains violents des élections controversées au Kenya, entre autres, semblent conforter cette perception. Tandis que les griefs s'accumulent et sont définis au niveau du groupe plutôt qu'au niveau individuel, les représailles ne manquent jamais de justifications. L'inertie vieille de plusieurs siècles sous-tendant cette animosité défie de plus toute tentative de résolution. La diversité ethnique compliquée de l'Afrique semble laisser le continent dans un état de vulnérabilité perpétuel face à des conflits dévastateurs, axés sur la destruction réciproque. En conséquence, cette situation entrave toutes perspectives de démocratisation et de progrès économique durables.

Ethnicité, mobilisation ethnique et conflit

En réalité, l'ethnicité ne se trouve généralement pas à la source des conflits en Afrique, elle est davantage un outil utilisé par les dirigeants politiques pour mobiliser leurs partisans dans leur conquête du pouvoir, de la richesse et des ressources. Si l'appartenance ethnique est sans contexte le principal moyen de formation de l'identité sociale en Afrique, la plupart des groupes ethniques coexistent pacifiquement sur le continent, avec des niveaux élevés de mixité à travers les mariages interethniques, les partenariats économiques et le partage de valeurs communes. Dans le cas contraire, quasiment chaque village ou province d'Afrique serait à feu et à sang.

« Le diagnostic erroné postulant que les conflits africains sont d'origine ethnique ignore la nature politique des points de discorde. »

Au Rwanda, l'argument d'une différence physique entre les Hutu et les Tutsi n'est tout simplement pas recevable tant les deux groupes se sont mariés entre eux. Ils parlent la même langue et partagent la même foi. En réalité, l'identité ethnique était étroitement associée au métier (agriculteur ou pasteur) et l'appartenance ethnique d'un individu pouvait donc varier au fil du temps selon les changements d'activité. La violence au Rwanda s'est avant tout ancrée dans l'inégale distribution des ressources et du pouvoir. Les manipulations politiques de ces conflits basés sur la conquête des ressources ont conduit au génocide parfaitement orchestré de 1994. Les hommes politiques, les démagogues et les médias ont utilisé le concept d'ethnicité pour conquérir un soutien populaire et éliminer les opposants politiques (à la fois Tutsi et Hutu modérés).

Au Ghana, le gouvernement militaire du général I.K. Acheampong a décidé en 1979 de transférer le contrôle de toutes les terres du Nord du pays à quatre des dix-sept groupes ethniques qui vivaient dans la région. À l'époque, les forces armées cherchaient à faire accepter un gouvernement unipartite. Dans la mesure où la proposition était soumise à un référendum national, un « Oui » du Nord était indispensable au gouvernement pour contrer un « Non » du Sud. L'affectation des terres était au centre du marché passé entre certains hommes politiques du Nord et le gouvernement, en échange de leur soutien. La question est devenue un point charnière dans la mobilisation de groupes ethniques comme les Konkomba et les Vagla au nom du développement de leur région. Les premiers événements violents entre les communautés sont apparus peu de temps après et se sont poursuivis durant les 15 années suivantes, le point culminant étant la guerre civile de 1994-95 qui a coûté la vie à près de 2 000 personnes. A cette époque, plus de 26 conflits entre communautés au sujet de la terre (ressources) et des chefferies (pouvoir) ont éclaté dans le nord du Ghana, tous caractérisés comme des conflits ethniques.

Une telle caractérisation—au Ghana comme dans beaucoup d'autres pays africains—représente une simplification à outrance. En effet, de nombreux experts des conflits jugent cette distinction ethnique comme étant sans fondement.

La plupart du temps, c'est la politisation de l'ethnicité qui exacerbe les perceptions de l'injustice, du manque de reconnaissance et d'exclusion à la source du conflit, et non pas l'ethnicité en tant que telle. Le diagnostic erroné caractérisant les conflits africains comme étant de nature ethnique ignore la nature politique des points de discorde. Les individus ne s'entretiennent pas du fait de leurs différences ethniques. Ils s'entretiennent lorsque ces différences sont dénoncées comme étant des obstacles à leur avancement et à leurs domaines de possibles. La tendance de certaines sociétés africaines à succomber à

cette manipulation d'élites politiques opportunistes souligne la fragilité du processus de construction de l'Etat-nation sur le continent.

Dans de nombreux cas, les choix politiques adoptés par les différents Etats sont au fondement de la mobilisation ethnique. En d'autres termes, les « conflits ethniques » émergent souvent dans des sociétés pluriethniques sous-développées lorsque l'Etat semble être dominé par un groupe particulier, lorsque des communautés se sentent menacées de marginalisation, ou lorsqu'aucun recours n'existe en cas de grief.

Dans la grande majorité des cas, la pensée et la mobilisation ethniques résultent de l'accès inéquitable au pouvoir et aux ressources, et non d'une haine intrinsèque.

Les éruptions sporadiques de violence opposant les chrétiens aux musulmans à Jos, la capitale très cosmopolite de l'Etat nigérian du Plateau, en constituent un cas typique. Cette violence est en général attribuée à un conflit entre communautés. Or, cette caractérisation ignore certaines des dispositions institutionnelles du système fédéral nigérian qui encouragent la violence. Les autorités locales et étatiques pérennisent ce système et contrôlent dans le même temps près de 80 % du PIB du pays. En dehors de l'allocation des ressources, les instances locales sont chargées de classer les citoyens en tant qu'« autochtones » ou « colons ». Les « colons » se voient refuser l'accès à certains postes au niveau du gouvernement de l'Etat, n'ont pas droit aux subventions pour l'éducation publique et n'ont pas le droit d'être propriétaires terriens. Dans l'Etat du Plateau, cela se traduit par la classification des musulmans parlant le hausa comme « colons », et ce même si leur famille vit dans la région depuis des générations. Les tensions continues et parfois même violentes qui résultent d'une telle situation sont prévisibles.

Contraintes institutionnelles à la mobilisation ethnique

Le fait de reconnaître que l'appartenance ethnique est un instrument et non la source des conflits entre divers groupes devrait nous permettre de recentrer nos efforts d'atténuation des conflits sur leurs facteurs de déclenchement politiques. La mobilisation durant la période pré-confliktuelle souligne l'importance d'une intervention précoce, avant le stade d'embrasement des passions ethniques.

Les institutions et les structures de l'Etat qui reflètent la diversité ethnique et le respect des droits des minorités, un partage équitable du pouvoir et un système efficace de contre-pouvoir permettent d'atténuer la perception d'injustice et d'insécurité propice à la mobilisation ethnique. Le système judiciaire est donc essentiel. Dans les sociétés où la justice ne peut pas être obtenue à travers les institutions publiques, les groupes ont plus de risque de recourir à la violence pour résoudre leurs griefs. Une société juste ne se limite cependant pas au système judiciaire : la primauté du droit et une réelle séparation des pouvoirs sont nécessaires pour prévenir les abus de pouvoir de l'Etat. De telles mesures empêchent les fonctionnaires d'utiliser leurs pouvoirs au profit de leur groupe ethnique. Dans la plus grande partie de l'Afrique, c'est la branche de l'exécutif et non du législatif qui détermine la plupart des politiques territoriales. Invariablement, le groupe d'appartenance ethnique du Président bénéficie de ces politiques. Au Kenya, pendant les années 1960 et 1970, les Kikuyu ont ainsi utilisé les avantages politiques et économiques mis à leur disposition sous le régime Kenyatta pour créer des entreprises de rachat des

terres afin de faciliter l'installation de centaines de milliers de Kikuyu dans la vallée du Rift.

Un système judiciaire équitable permet également à la société civile de se rassembler autour de préoccupations communes telles que le développement, la reddition de comptes et le respect des droits de l'homme, au-delà des affiliations ethniques. Cette situation facilite à son tour les échanges entre les groupes. Les associations professionnelles, les clubs sportifs et les groupes d'artistes, entre autres, sont toutes des organisations de la société civile capables de franchir les frontières ethniques et d'établir des collaborations fructueuses avec le gouvernement.

Les élections et les systèmes électoraux représentent un autre domaine de focalisation politique. Les élections en elles-mêmes ne sont pas nécessairement au fondement de la stabilité. Au contraire, elles peuvent devenir une source de tensions et de violences ethniques. La pratique du « le gagnant rafle toutes les voix » dans un contexte d'Etat pluriethnique et sous-développé, où le gouvernement contrôle déjà la majorité des ressources, transforme les élections en une question de vie ou de mort. Par conséquent, il est fondamental que les systèmes électoraux soient indépendants du pouvoir politique. L'une des différences entre les récentes élections au Kenya et au Ghana était l'indépendance et la solidité de la Commission électorale ghanéenne. De plus, dès la validation des résultats électoraux par la Commission électorale au Ghana, des groupes privés avaient le droit de porter les irrégularités devant les tribunaux. Ces niveaux multiples de reddition de comptes ont donné confiance aux ghanéens en leur système électoral en dépit d'élections très serrées en 2008.

« La diversité ethnique dans le secteur de la sécurité présente des avantages tangibles dans la mesure où les forces de police sont souvent confrontées à des conflits de niveau infra-étatique. »

Les entités religieuses et les ONG locales ont contribué à diffuser les messages de la CHRAJ (1) vers la base à travers des ateliers, des séminaires et actions de soutien pour les communautés voulant soumettre leurs griefs à la Commission. Grâce à cette infrastructure, ce système d'éducation et les ressources en place, les ghanéens en sont arrivés à intégrer la primauté du droit et l'assurance d'une réaction rapide en cas de dépôt de griefs au niveau de la communauté, du district et de la région.

Priorités pour l'atténuation des conflits ethniques en Afrique

La reformulation des conflits ethniques comme manœuvre politicienne pour la conquête du pouvoir et des ressources doit nous amener à repenser notre approche des stratégies d'atténuation. Plutôt que d'envisager le conflit identitaire comme une conséquence inévitable de la diversité ethnique en Afrique, nous devons accorder la priorité à certaines politiques préventives.

Établissement de structures institutionnelles de rassemblement

La relation entre les groupes ethniques et l'Etat dans la recherche de la sécurité et de la reconnaissance de l'identité se situe au cœur des conflits ethniques. La manière dont l'Etat négocie ces intérêts et ces besoins va déterminer le niveau des conflits d'identité. Un système judiciaire complet qui respecte les droits des minorités, les protège de l'abus de pouvoir étatique et garantit la prise en compte de leurs griefs va réduire les possibilités de mobilisation ethnique. Une telle solution nécessite entre autres un accès équitable aux postes de la fonction publique et aux divers services offerts par l'Etat. La participation des minorités au sein du leadership et dans les rangs du secteur de la sécurité reste essentielle au sein des fonctions de l'Etat. Les forces armées peuvent constituer une institution de rassemblement créatrice de lien entre les groupes ethniques, aidant à forger une identité nationale au-delà des ethnies, fournissant aux jeunes la possibilité de voyager et de vivre à travers le pays, et permettant aux minorités d'accéder à des positions de leadership par la méritocratie. La diversité de la représentation ethnique dans le secteur de la sécurité présente également des avantages tangibles, les forces de police étant en effet impliquées dans la gestion des conflits de basse intensité, dans diverses sociétés.

Les élections sont souvent le détonateur de l'explosion des griefs ethniques—et constituent de ce fait une priorité en matière d'atténuation de la violence. Elles représentent une occasion de rêve pour les hommes politiques d'instrumentaliser les différences ethniques. L'établissement d'une Commission électorale indépendante et représentative menée par des individus irréprochables peut conduire à l'échec de tels stratagèmes. Comme le montre l'exemple du Ghana, entre autres, l'efficacité d'une Commission électorale compétente peut avoir un énorme impact dans la lutte contre la violence ethnique. Des Commissions électorales indépendantes peuvent également établir des règles électorales favorisant les candidats capables d'établir des coalitions entre les régions et les groupes (ou l'exigeant véritablement des candidats). Le fait de garantir par exemple que le découpage électoral ne coïncide pas avec les frontières ethniques s'inscrit dans une telle stratégie.

Renforcement des normes sociales positives

Sur le moyen et le long terme, le désamorçage de l'instrumentalisation de l'ethnicité à des fins politiques nécessite la réorientation des normes culturelles. Les campagnes de marketing social qui encouragent l'unité nationale, la coopération entre les groupes et la « force à travers la diversité » peuvent contribuer à reformuler le concept d'ethnicité sous un jour positif, rendant la tâche plus ardue aux politiciens semeurs de zizanie cherchant à jouer sur les différences pour mobiliser leurs partisans. Une telle stratégie de communication serait complétée par une campagne de communication dans les communautés à l'échelle du pays, et mise en œuvre par les organisations de la société civile. Elle renforcerait auprès des jeunes le concept d'unité « un pays, un peuple », diffuserait les messages de tolérance envers d'autres groupes et d'importance d'une résolution non-violente des conflits.

Le ciblage de la jeunesse est particulièrement important pour modifier les comportements intergénérationnels concernant l'ethnicité. Les jeunes sont en effet un groupe démographique très facile à mobiliser en faveur de la violence. Un système

éducatif complet et délibérément conçu pour promouvoir l'intégration et la coexistence pacifique, avec une attention particulière portée à l'éducation civique, aux notions de citoyenneté et de nation permet de renforcer le concept d'un même peuple partageant une même destinée. Une campagne de marketing social va transmettre ce message de rassemblement directement au peuple au lieu de le confier à des dirigeants politiques ou ethniques (susceptibles de bénéficier d'une perception de divisions). Cette campagne, qui suit le modèle de Julius Nyerere, le célèbre dirigeant tanzanien, contribuerait à la fois à la construction d'une identité nationale commune (qui fait cruellement défaut à tant de pays africains) et à la suppression de l'argument ethnique brandi par les acteurs politiques.

Les médias jouent également un rôle unique au niveau de la communication des informations et des perceptions dans la société. En tant que tels, il leur incombe la responsabilité d'encourager le débat et le dialogue, indispensables à la démocratie. Malheureusement, dans la pratique, certains médias africains sont souvent contrôlés par des individus influents sur le plan politique, alimentant les divisions identitaires pour soutenir leurs intérêts et contribuant beaucoup de ce fait au potentiel de conflit identitaire. Les médias peuvent aussi contribuer à l'escalade d'un conflit du niveau local au niveau national, augmentant ainsi les risques de violence et compliquant la résolution. Du fait de la capacité unique des médias à influencer les attitudes sociales et la mobilisation de masse, la plupart des sociétés ont intégré le fait que les médias doivent respecter certaines normes de comportement responsable. Ces normes doivent inclure l'interdiction des programmations incitant à l'animosité ethnique. Là encore, des entités de contrôle indépendantes, peut-être en collaboration avec des groupes de médias nationaux, devraient jouir du pouvoir d'enquêter rapidement et d'appliquer des sanctions sévères contre les organismes ayant violé les normes contre l'incitation à la haine.

Réponse précoce

Une leçon essentielle tirée de l'expérience de prévention et d'atténuation des tensions ethniques en Afrique est l'importance du facteur temps : elle met en évidence la nécessité de résoudre ces problèmes le plus tôt possible. L'atténuation des tensions est davantage aisée et moins coûteuse en termes sociaux et financiers, si elle a lieu avant les divisions entre les groupes et l'apparition de la violence (ce qui ensuite déclenche un nouveau cycle encore plus polarisé de griefs, de craintes, de manque de confiance et de revanche). Cela souligne également l'importance pour les représentants officiels de prendre très au sérieux tout affrontement exprimé entre des groupes (par ex. des plaintes concernant la discrimination, le dénigrement ou le déni des droits) et d'y répondre immédiatement. Il est bien évidemment entendu que le gouvernement est compétent et prêt à faire face à ces conflits et qu'il n'est pas une des parties au grief. La création d'un ombudsman des droits de l'homme, considéré comme un acteur impartial chargé de documenter les plaintes basées sur l'ethnicité et de mener l'enquête, offre le double avantage d'un mécanisme qui traite ces plaintes de manière équitable et qui peut contribuer à désamorcer les tensions avant leur explosion. L'assurance d'un traitement systématique et équitable des griefs réduit la probabilité qu'un individu fasse justice lui-même.

Enfin, la prévention de l'escalade incontrôlée des tensions ethniques requiert une réaction rapide au sein du secteur de la sécurité et ce afin de répondre aux affrontements entre les groupes. Les forces armées et de police doivent être formées pour réagir d'une manière équitable mais sans équivoque, ce qui renforce la confiance en la capacité de l'Etat d'intervenir de manière constructive. Dans la mesure où la plupart des actes de violence ethnique se produisent au niveau local, entre des communautés voisines, une réponse rapide avant le déclenchement d'autres événements est d'une importance vitale. La nature locale de ces déclencheurs ethniques souligne également la nécessité d'une formation à grande échelle des forces de sécurité. Chaque unité de police locale doit être consciente des contextes de tensions ethniques, et savoir y répondre dans la mesure où elle sera sûrement la première sur le terrain. Elle peut aussi être renforcée par des forces militaires (probablement au niveau de la province) qui seront dotées, dans la plupart des cas, de meilleures capacités de transport, de communication et de puissance de feu pour le contrôle de la situation. Cependant, la première réponse par la police est essentielle pour définir la trajectoire de cette confrontation.

L'homme a tendance à accentuer les différences entre les groupes. Les sociétés civilisées apprennent à prévenir ces impulsions de polarisation de la violence. La compréhension des racines politiques de nombreux conflits ethniques en Afrique peut nous aider à recentrer et à réorienter nos efforts de prévention des conflits, et ce faisant, à améliorer l'efficacité du nombre croissant des mesures correctives à notre disposition.

(1) **CHRAJ** : Commission pour les Droits de l'homme et la justice administrative.

Clément Mweyang Aapengnuo