CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE A

AVRIL 2002

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

❶ On obtient $f'(x) = \ln x - 1$. La dérivée s'annule pour $x = e$. La fonction f est strictement décroissante sur $]0, e]$ et croissante sur $[e, +\infty[$, avec une branche parabolique dans la direction oy.

❷ La résolution de l'équation proposée revient à trouver l'intersection entre le graphe de f et la droite d'équation $y = ax + e$. D'après le graphe, il y a toujours deux solutions.

❸ $I = \int_0^e (xLnx - 2x + e)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} Lnx - \frac{x^2}{4} - x^2 + ex \right]_0^e = \frac{e^4}{4}$

EXERCICE n° 2

❶ $\varphi_{a,b}(x) - 1 = \cos\left(x - \frac{a+b}{2} \right) - \cos\left(\frac{a-b}{2} \right) = 2 \sin\left(\frac{x-a}{2} \right) \sin\left(\frac{b-x}{2} \right)$

Pour $a < x < b$, on a : $0 < \frac{x-a}{2} < \pi$ et $0 < \frac{b-a}{2} < \pi$, donc $\varphi_{a,b}(x) > 1$

Pour $x = a$ ou $x = b$, $\varphi_{a,b}(x) = 1$

Pour $x < a$ ou $x > b$, $\varphi_{a,b}(x) < 1$? D'autre part, $\varphi_{a,b}(x) \geq -\cos\frac{a-b}{2} > 1$

❷ Soit $M = \underset{[-\pi,\pi]}{Sup}|f|$. Cette borne est atteinte en x_0 et par continuité, il existe un intervalle $[\alpha,\beta]$ contenu dans $[-\pi,\pi]$, tel que pour tout x appartenant à $[\alpha,\beta]$, on a : $|f(x)| > \frac{M}{2}$. On suppose que $f(x) > 0$ sur cet intervalle (sinon on change f en $-f$). Posons $a = \alpha$ et $b = \beta$.

$$\int_a^b f(x)(\varphi_{a,b}(x))^n\, dx \geq \frac{M}{2}(b-a)$$

Fixons η tel que $2\eta M < \frac{b-a}{8} M$, de sorte que :

$\left|\int_a^{b+\eta} f(x)(\varphi_{a,b}(x))^n\, dx\right| \leq \eta M < \frac{M}{16}(b-a)$ et $\left|\int_{a-\eta}^{a} f(x)(\varphi_{a,b}(x))^n\, dx\right| \leq \eta M$, avec $-\pi \leq a-\eta$ et $b+\eta \leq \pi$

$\varphi_{a,b}$ est continue sur le compact $[-\pi, a-\eta] \cup [b+\eta, \pi] = K$ et prend ses valeurs dans $[-1,1]$, il existe donc $k \in]0,1[$ tel que pour tout $x \in K$, $|\varphi_{a,b}(x)| \leq k \Rightarrow \left|\int_K f(x)\varphi_{a,b}(x)^n\, dx\right| \leq 2M\pi k^n$

On peut alors choisir n tel que $2\pi M k^n < \frac{b-a}{2} M$.

Pour toute valeur de n, $\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\varphi_{a,b}(x))^n\, dx\right| \geq \frac{M(b-a)}{2} - 2\eta M - \frac{M(b-a)}{8} \geq \frac{M}{4}(b-a)$,

l'intégrale est non nulle.

❸

$$\varphi_{a,b}(x) = \cos x \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) + \sin x \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) + 1 - \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = pe^{ix} + qe^{-ix} + r .$$

Par conséquent, $\varphi_{a,b}(x)$ est une combinaison linéaire de $\left(e^{inx}\right)$, donc $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_{a,b}(x)^n\, dx = 0$ d'après l'hypothèse et la question 2, ceci implique $f = 0$

EXERCICE n° 3

❶ On montre que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et on vérifie par récurrence la relation : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

❷ Le minimum est atteint pour la valeur de a qui annule la dérivée. a est égal à la moyenne des X_t $(t = 1,2,\ldots n)$.

❸ On pose $f(a,b) = \sum_{t=1}^{n} (X_t - (at+b))^2$. Le minimum est obtenu pour les valeurs qui annulent les deux dérivées partielles :

$\sum_t t(X_t - at - b) = 0$ et $\sum_t (X_t - at - b) = 0$. Il faut alors résoudre le système suivant à deux équations :

$$\begin{cases} \sum_t t\,X_t = a\left(\sum_t t^2\right) + b\left(\sum_t t\right) \\ \sum_t X_t = a\left(\sum_t t\right) + bn \end{cases}$$

ou encore $\begin{pmatrix} \sum_t t^2 & \sum_t t \\ \sum_t t & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_t tX_t \\ \sum_t X_t \end{pmatrix}$

Soit $D = n\sum_t t^2 - (\sum_t t)^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$. On obtient

$$a = \frac{\sum_t t\,X_t - \frac{(n+1)\sum_t X_t}{2}}{D} n \text{ et } b = \frac{(\sum_t t^2)(\sum_t X_t) - (\sum_t t)(\sum_t t\,X_t)}{D}$$

EXERCICE n° 4

Par hypothèse : $(u_{2n}) \to l_1$, $(u_{2n+1}) \to l_2$ et $(u_{3n}) \to l_3$. La suite extraite $(u_{6n}) \to l_3 = l_1$ et la suite extraite $(u_{6n+3}) \to l_3 = l_2$. Donc les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, et (u_n) est convergente.

PROBLEME

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on définit les fonctions f_n sur l'ensemble des nombres réels positifs par : $f_n(x) = x^n - Ln(1+x)$

❶ et ❷ $f_n^{'}(x) = nx^{n-1} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{nx^{n-1}(x+1)-1}{x+1}$. La dérivée est du signe de $z(x) = nx^{n-1} + nx^n - 1$. En étudiant les variations de $z(x)$, on obtient :

x	$0 \quad \alpha_n \; 1 \quad +\infty$
$f_n(x)$	$0 \downarrow - \uparrow \quad +\infty$

Il existe donc un unique α_n tel que $f_n(\alpha_n) = 0$

❸ On a $f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}^n - Ln(1+\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}^n - \alpha_{n+1}^{n+1} = \alpha_{n+1}^n(1-\alpha_{n+1}) > 0$ et $f_n(\alpha_n) = 0$, donc $f_n(\alpha_n) < f_n(\alpha_{n+1})$. Comme f_n est bijective, $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.

La suite (α_n) est croisante, majorée par 1, elle est donc convergente vers une limite $l \in]0,1]$. Cette limite vérifie l'équation $l^n = Ln(1+l)$. Si $l \neq 1$, alors $l^n \to 0$ et $Ln(1+l) \neq 0$. En conclusion $l = 1$

❹ On pose $\alpha_n = 1 - u_n$. On a : $\alpha_n^n = Ln(1+\alpha_n)$ et $Ln\alpha_n^n = Ln(Ln(1+\alpha_n))$.
Par ailleurs $Ln\alpha_n^n = nLn\alpha_n = nLn(1-u_n) \approx -nu_n$ et $Ln(Ln(1+\alpha_n)) \to LnLn2$

u_n est donc équivalent à $\dfrac{-Ln(Ln2)}{n}$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE A

AVRIL 2002

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

1) Le code est composé de 4 chiffres, chacun de ces chiffres pouvant prendre 10 valeurs : il y a 10^4 = 10 000 codes possibles.

2) Les 4 chiffres d'un code sont distincts 2 à 2 lorsque tous les chiffres qui le composent sont distincts. Le nombre de codes à 4 chiffres distincts est le nombre d'arrangements de 4 chiffres parmi 10 : c'est à dire A_{10}^4 = 10 x 9 x 8 x 7 = 5040 codes formés de 4 chiffres distincts 2 à 2.

3) a) On sait que les 4 chiffres du code sont 2, 5, 5, 8. Les codes distincts que l'on peut composer avec ces chiffres peuvent être obtenus à partir d'un arbre. Ce sont les 12 codes suivants:

2-8-5-5, 2-5-8-5, 2-5-5-8, 5-2-5-8, 5-2-8-5, 5-8-2-5, 5-8-5-2, 5-5-2-8, 5-5-8-2, 8-5-5-2,

8-5-2-5, 8-2-5-5

b) Soit u_n le délai d'attente (en minutes) entre le $(n-1)$-ième et le n-ième essai. On a

u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 4. Plus généralement, on sait que le temps d'attente double entre 2 essais successifs, donc $u_{n+1} = 2u_n$. Le délai d'attente u_n est donc une suite géométrique de premier terme u_2 = 1 et de raison 2. Donc pour tout entier $n \geq 2$ on a $u_n = 2^{n-2}$

Le temps nécessaire pour tenter $n \geq 2$ essais est donc (en minutes)

$u_2 + u_3 + \ldots + u_n = 1+2+2^2+\ldots+2^{n-2} = (2^{n-1}-1)/(2-1) = 2^{n-1}-1$ minutes.

c) **Application** :

1- le nombre de codes que le propriétaire peut introduire au maximum en 24 heures est le plus grand nombre entier n solution de l'équation $2^{n-1}-1 \leq 1440$ (puisqu'il y a 60 x 24 = 1440 minutes dans 24 heures) . Ceci équivaut à :

$$2^{n-1} \leq 1441$$
$$(n-1)ln(2) \leq ln(1441)$$

car la fonction logarithme népérien *ln* est strictement croissante sur]0, +∞[. On en déduit :

$$n - 1 \leq (ln(1441)/ln(2) = 10,54$$

soit $n \leq 10,54 + 1$: le propriétaire peut au maximum introduire 11 codes en 24 heures.

2- Pour introduire 20 codes différents, le voleur va passer $2^{20\ -1}-1=2^{19}-1$ = 524288-1 c'est à dire 524287/(60x24x365) = 0.9975 année. Il doit donc passer pratiquement une année pour introduire 20 codes !!!

EXERCICE n° 2

1) Il suffit de noter que le second membre est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison z différente de 1. On peut également multiplier les deux membres par z-1 et développer.
2) Les solutions sont les racines quatrièmes de l'unité : 1, i, -1 et –i
3) Introduisons l'inconnue auxiliaire Z = $\frac{z+i}{z-i}$. Nous sommes ramenés à résoudre :

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$$

D'après la question 1) , ceci équivaut à résoudre $Z^4 = 1$ avec Z différent de 1. D'après la question 2), Z peut prendre les valeurs i, -1 et –i. Les solutions correspondantes pour z sont 0, 1 et –1. On vérifie que ces solutions sont bien différentes de i.

4) On a $Z = \dfrac{z+i}{z-i} = \dfrac{(z+i)(\overline{z}+i)}{|z-i|^2} = \dfrac{z\overline{z}+i(z+\overline{z})-1}{|z-i|^2} = \dfrac{x^2+y^2-1+2ix}{x^2+(y-1)^2}$.

a) Z est réel s'il existe et si sa partie imaginaire est nulle donc si les coordonnées (x, y) de M vérifient :

$x = 0$ et $x^2 + (y-1)^2 \neq 0$ c'est à dire si $x = 0$ et $y \neq 1$

C'est donc l'axe des ordonnées privé du point (0, 1)

b) De même Z est imaginaire pure si

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ et $x^2 + (y-1)^2 \neq 0$ c'est à dire si $x^2 + y^2 = 1$ et $y \neq 1$

C'est donc le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point (0, 1).

c) $|Z| = 1$ si $|z+i| = |z-i|$ et $z \neq i$ c'est à dire si $y = 0$

C'est donc l'axe des abscisses.

PROBLEME

Partie A.

1) La fonction $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$ est définie, continue et dérivable sur R et pour tout réel x on a :

$$f'(x) = 2(x + 1) e^{-x} - (x + 1)^2 e^{-x}$$

$$= (x + 1)(1-x) e^{-x}$$

B est le point de (C) d'abscisse 1, l'ordonnée de B est donc $f(1) = 4e^{-1} = 4/e$.

L'équation de la tangente à (C) en B est $y = f'(1)(x-1)+f(1)$, c'est à dire y = 4/e (puisque $f'(1) = 0$).

2) Le point A a pour coordonnées ($0, f(0)$) soit (0, 1) car $f(0)=1$. L'équation de la tangente à (C) en A est donnée par $y = f'(0)x+f(0)$, soit $y = x+1$ car $f'(0)=1$. Cette tangente est parallèle à la droite (Δ) d'équation $y = x$ car elles ont même coefficient directeur. Cette tangente coupe l'axe des abscisses pour y=0, donc au point de coordonnées (-1, 0).

3) On peut écrire pour tout réel x :

$f(x) = (x + 1)^2 e^{-x} = x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x}$ et comme quand x → +∞, lim $x^a / e^x = 0$ pour a>0, f(x) tend vers 0 quand x → +∞. Donc, l'axe des abscisses est asymptote à (C) au voisinage de +∞. De même, quand x → -∞, lim f(x) = +∞.

4) Pour tout x, $e^{-x} > 0$ *et* la dérivée f'(x) est du signe de (x+1)(1-x), donc on a le tableau de variation de f suivant :

x	-∞		-1		1		+∞
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	+∞	↓	0	↑	4/e	↓	0

5) Posons $u(x) = (x + 1)^2$ *et* $v'(x) = e^{-x}$. Nous avons alors : $u'(x) = 2(x + 1)$ *et* $v(x) = -e^{-x}$

Une première intégration par parties donne :

$$I = \left[-(x+1)^2 e^{-x}\right]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}dx$$

$$I = -1 + 2\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}dx$$

Posons à nouveau : $w(x) = (x + 1)$ *et* $v'(x) = e^{-x}$. On obtenons : $w'(x) = 1$ *et* $v(x) = -e^{-x}$. Une nouvelle intégration par parties donne :

$$I = -1 + 2\left(\left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-x}dx\right)$$

$$I = -1 + 2\left(-1 + \int_{-1}^{0} e^{-x}dx\right)$$

$$I = -3 + 2\left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0}$$

$$I = 2e - 5$$

Partie B

1) Nous avons $f(1)= 4/e$. Une approximation décimale à 10^{-2} près de $f(1)$ =1.47.

On a $f(\frac{3}{2})=\frac{25}{4}e^{-3/2}$dont une approximation décimale est $f(\frac{3}{2})=1.39$.

2) Raisonnons par récurrence sur n : on a $u_0 = \frac{3}{2}$ donc $1 \leq u_0 \leq \frac{3}{2}$. Supposons que

$1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$. Comme la fonction f est strictement décroissante sur [1, +∞ [: on a

$$f(\frac{3}{2}) \leq f(u_n) \leq f(1)$$

Or f(1)=1.47 et $f(\frac{3}{2})=1.39$ *donc* $1 \leq f(\frac{3}{2})$ *et* $f(1) \leq \frac{3}{2}$. On en déduit que

$1 \leq f(u_n) \leq \frac{3}{2}$, c'est à dire $1 \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$.

3) Pour tout réel x : $f'(x) = (x + 1)(1-x)\, e^{-x}$. Donc pour tout x appartenant à $[1, \frac{3}{2}]$ on a :

$$x+1 \leq 5/2 \text{ puisque } x \leq \frac{3}{2} \text{ et } |1-x| = x-1 \leq ½$$

et comme la fonction $v(x)=e^{-x}$ est strictement décroissante sur $[1, \frac{3}{2}]$, on a :

$e^{-x} \leq e^{-1}$. Donc pour tout x appartenant à $[1, \frac{3}{2}]$ on a :

$$|f'(x)| \leq 5/4e.$$

Une approximation décimale à 10^{-2} près de 5/4e est 0.46, donc pour tout x appartenant à $[1, \frac{3}{2}]$ on a : $|f'(x)| \leq ½$.

4) M_0 d'abscisse x_0 étant le point d'intersection de (C) et de la droite y=x, on a $f(x_0) = x_0$.

Nous avons montré que $1 \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$ pour tout entier n et que $|f'(x)| \leq ½$ pour tout réel x appartenant à $[1, \frac{3}{2}]$. Comme x_0 appartient à cet intervalle, nous obtenons, en utilisant l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(u_n)-f(x_0)| \leq 1/2|u_n - x_0| \text{ pour tour entier naturel n,}$$

En utilisant les résultats précédents : $|u_{n+1} - x_0| \leq 1/2|u_n - x_0|$ pour tour entier naturel n. Ainsi, nous avons les inégalités:

$|u_1 - x_0| \leq 1/2|u_0 - x_0|$

$|u_2 - x_0| \leq 1/2|u_1 - x_0|$

$|u_3 - x_0| \leq 1/2|u_2 - x_0|$

$|u_n- x_0| \leq 1/2|u_{n-1} - x_0|$

En multipliant membre à membre ces n inégalités, nous obtenons après simplification :

$$|u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - x_0|.$$

Or $u_0 = 3/2$ et x_0 appartient à $[1, \frac{3}{2}]$, donc $|u_0 - x_0| \leq ½$. On en déduit que

$|u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout entier n. Comme $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ quand n tend vers $+\infty$, on a : $\lim |u_n - x_0| = 0$. La limite de la suite (u_n) est donc x_0.

5) f étant décroissante pour $x > 1$, $f(u_n)-f(x_0)$ et $u_n - x_0$ sont de signes contraires, c'est à dire que $u_{n+1} - x_0$ et $u_n - x_0$ sont de signes contraires.

On peut calculer une valeur approchée de x_0 à 10^{-k} près en calculant successivement les termes de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ pour n=0, 1, 2 etc. et l'on s'arrêtera dès que la k-ème décimale ne varie plus : Ainsi pour k=3, on peut dresser le tableau suivant :

N	u_n
1	1.39456
2	1.42167
3	1.41516
4	1.41675
5	1.41636

Une approximation à 10^{-3} près de x_0 est 1.416.

Correction de l'épreuve de calcul numérique
CONCOURS 2002
ITS A – 2H

Problème :

1 Tableau.

1. $n_{2.} = 10$ représente le nombre de semaines pendant lesquelles le magasin a reçu $x_2 = 300$ coups de téléphones et $n_{.3} = 18$ le nombre de semaines pendant lesquelles le magasin a fait $y_3 = 8000$ Euros de chiffre d'affaires.

2. $\tilde{n} = \sum_{j=1}^{4} n_{.j} = 50$. La relation est $\tilde{n} = n = \sum_{j=1}^{4} n_{.j} = \sum_{i=1}^{4} n_{i.}$.

3.

	$y_1 = 1$	$y_2 = 3$	$y_3 = 4$	$y_4 = 5$	$n_{i.}$	$n_{i.}\ x_i$	$n_{i.}\ x_i^2$	$x_i \sum_{j=1}^{4} n_{ij} y_j$
$x_1 = 2$	4	3	2	0	9	18	36	42
$x_2 = 3$	2	3	4	1	10	30	90	96
$x_3 = 6$	0	4	5	3	12	72	432	282
$x_4 = 7$	0	5	7	7	19	133	931	546
$n_{.j}$	6	15	18	11				
$n_{.j}\ y_j$	6	45	72	55				
$n_{.j}\ y_j^2$	6	135	288	275				
$y_j \sum_{i=1}^{4} n_{ij} x_i$	14	222	380	350				

2 Moyenne, Variance, Covariance.

1. $\bar{\bar{x}} = 5.06$ et $\bar{\bar{y}} = 3.56$. Le magasin reçoit en moyenne 506 appels téléphoniques par semaine, et fait, en moyenne 7120 Euros de chiffre d'affaires par semaine.

2. $\mathrm{V}(x) = 4.1764$ et $\mathrm{V}(y) = 1.4064$. L'écart-type marginal de x est égal à environ 204 appels téléphoniques hebdomadaires et celui de y est égal à environ 2372 Euros par semaine.

3. $\mathrm{Cov}(x,y) = 1.3064$

4. $r = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sqrt{\mathrm{V}(x)}\sqrt{\mathrm{V}(y)}} = 0.539.$

3 Droites d'ajustement.

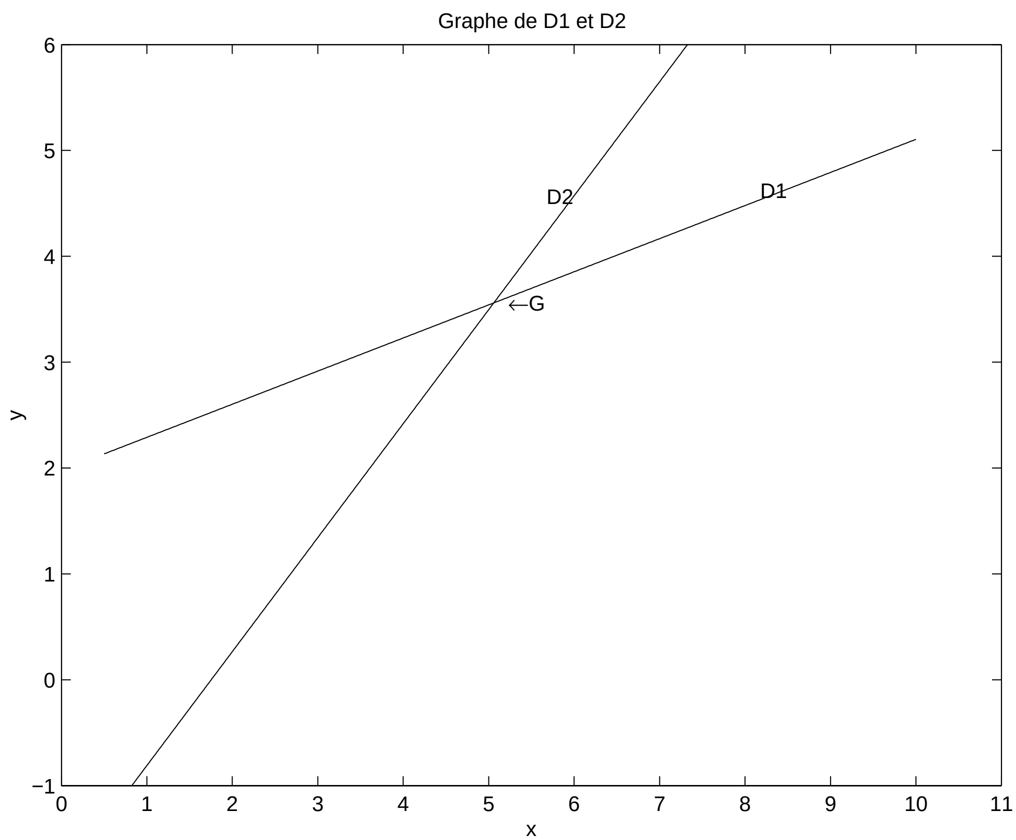
1. La droite d'ajustement de y en x est la droite D1 d'équation :

$$y = 0.3128x + 1.977.$$

La droite d'ajustement de x en y est la droite D2 d'équation :

$$x = 0.9289y + 1.753 \Leftrightarrow y = x/0.9289 - (1.753/0.9289)$$

2. Graphique.



Exercice 1. : Etant donné que les probabilités de chaque face sont proportionnelles à leur numéro, on a $\mathrm{P}(X=j) = k\ j, \ \ \forall j = 1, \ldots, 6$, où k est un nombre réel. Or, comme $\sum_{j=1}^{6}\ \mathrm{P}(X =$

$j) = 1$, on en déduit la valeur de k

$$\sum_{j=1}^{6} \mathrm{P}(X = j) = 1 \Leftrightarrow k \sum_{j=1}^{6} j = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{21}$$

1.

j	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{P}(X = j)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

2. L'espérance de X est donnée par :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{j=1}^{6} j \ \mathrm{P}(X = j) = \frac{1}{21} + \frac{4}{21} + \frac{9}{21} + \frac{16}{21} + \frac{25}{21} + \frac{36}{21} = \frac{91}{21}.$$

La variance de X est donnée par

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \sum_{j=1}^{6} j^2 \ \mathrm{P}(X = j) - (\mathrm{E}(X))^2 \\ &= \frac{1}{21} + \frac{8}{21} + \frac{27}{21} + \frac{64}{21} + \frac{125}{21} + \frac{216}{21} - (\frac{91}{21})^2 \\ &= \frac{980}{441} \end{aligned}$$

3. Les valeurs possibles de Y sont $2,\ 3, \ldots,\ 12$.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y = 2) &= (\mathrm{P}(X = 1))^2 = \frac{1}{21^2} \\ \mathrm{P}(Y = 3) &= 2(\mathrm{P}(X = 2)\mathrm{P}(X = 1)) = \frac{4}{21^2} \\ \mathrm{P}(Y = 4) &= 2(\mathrm{P}(X = 3)\mathrm{P}(X = 1)) + (\mathrm{P}(X = 2))^2 = \frac{10}{21^2} \\ \mathrm{P}(Y = 5) &= 2(\mathrm{P}(X = 3)\mathrm{P}(X = 2) + \mathrm{P}(X = 4)\mathrm{P}(X = 1)) = \frac{20}{21^2} \\ \mathrm{P}(Y = 6) &= 2(\mathrm{P}(X = 1)\mathrm{P}(X = 5) + \mathrm{P}(X = 4)\mathrm{P}(X = 2)) + (\mathrm{P}(X = 3))^2 = \frac{35}{21^2} \\ \mathrm{P}(Y = 7) &= 2(\mathrm{P}(X = 1)\mathrm{P}(X = 6) + \mathrm{P}(X = 2)\mathrm{P}(X = 5) + \mathrm{P}(X = 3)\mathrm{P}(X = 4)) = \frac{56}{21^2} \\ \mathrm{P}(Y = 8) &= 2(\mathrm{P}(X = 3)\mathrm{P}(X = 5) + \mathrm{P}(X = 2)\mathrm{P}(X = 6)) + (\mathrm{P}(X = 4))^2 = \frac{70}{21^2} \\ \mathrm{P}(Y = 9) &= 2(\mathrm{P}(X = 3)\mathrm{P}(X = 6)) + \mathrm{P}(X = 4)\mathrm{P}(X = 5) = \frac{76}{21^2} \\ \mathrm{P}(Y = 10) &= 2(\mathrm{P}(X = 4)\mathrm{P}(X = 6)) + (\mathrm{P}(X = 5))^2 = \frac{73}{21^2} \\ \mathrm{P}(Y = 11) &= 2(\mathrm{P}(X = 5)\mathrm{P}(X = 6)) = \frac{60}{21^2} \\ \mathrm{P}(Y = 12) &= (\mathrm{P}(X = 6))^2 = \frac{36}{21^2} \end{aligned}$$

j	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Y=j)$	$\frac{1}{21^2}$	$\frac{4}{21^2}$	$\frac{10}{21^2}$	$\frac{20}{21^2}$	$\frac{35}{21^2}$	$\frac{56}{21^2}$	$\frac{70}{21^2}$	$\frac{76}{21^2}$	$\frac{73}{21^2}$	$\frac{60}{21^2}$	$\frac{36}{21^2}$

Exercice 2. :

1. Graphe de la fonction f.

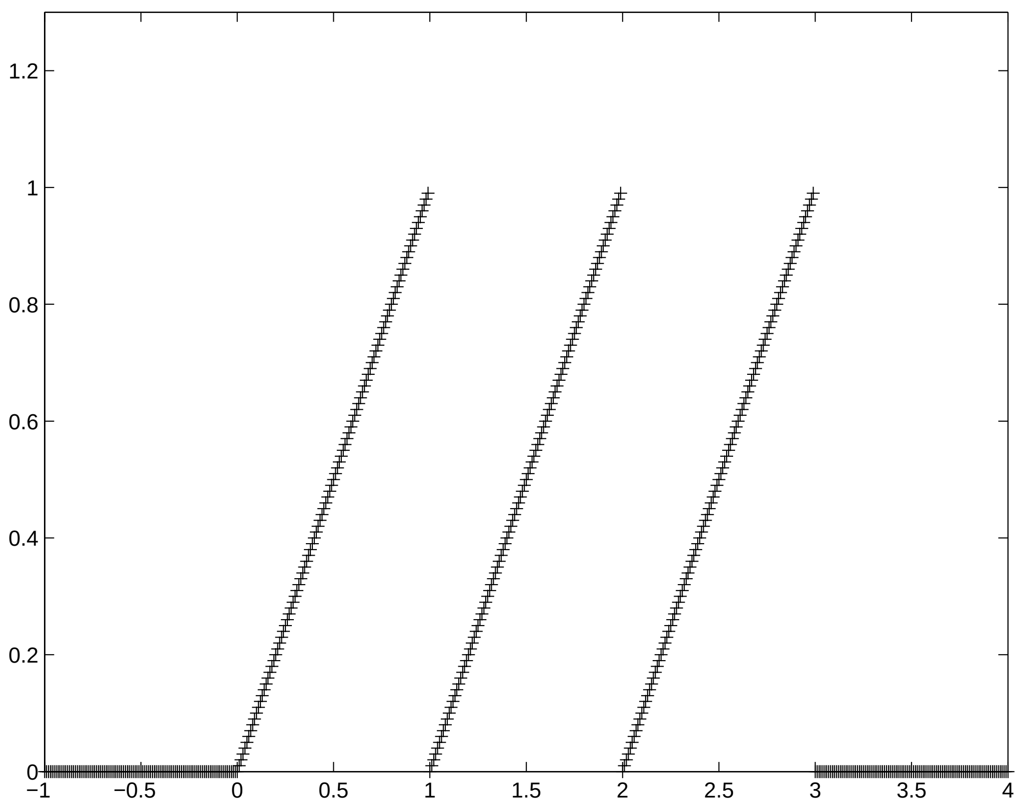


Figure 1: Graphe de la fonction $f(x)$.

2. On a $f(x_0) = 0$ et $\lim_{x\to x_0,\, x\neq x_0} f(x) = 0$. La fonction f est continue en x_0.
   On a $f(x_1) = 0$ et $\lim_{x\to x_1,\, x<x_1} f(x) = 1$. La fonction f n'est pas continue en x_1.
   On a $f(x_2) = 0$ et $\lim_{x\to x_2,\, x<x_2} f(x) = 1$. La fonction f n'est pas continue en x_2.
   On a $f(x_3) = 0$ et $\lim_{x\to x_3,\, x<x_3} f(x) = 1$. La fonction f n'est pas continue en x_3.