

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Soient les deux relations vérifiées par x , y et z , réels strictement positifs :

$$xyz > 1$$

$$x + y + z < (1/x) + (1/y) + (1/z)$$

1) Supposons que $x = 1$

$$\text{Alors } yz > 1 \text{ et } 1 + y + z < 1 + (1/y) + (1/z)$$

$$\text{D'où : } y + z < (1/y) + (1/z) \Leftrightarrow y + z < (y + z) / yz \Leftrightarrow yz < 1, \text{ ce qui est impossible.}$$

2) Supposons x , y et z tous ≤ 1 ; alors le produit $xyz \leq 1$, ce qui est impossible.

L'un au moins des réels x , y ou z est donc > 1 .

3) Supposons x , y et z tous ≥ 1 . Il est évident que $x \geq 1/x$, $y \geq 1/y$, $z \geq 1/z$, et donc que la somme $x + y + z \geq (1/x) + (1/y) + (1/z)$. ceci est impossible. L'un au moins des réels x , y ou z est donc < 1 .

Exercice n° 2

1) Faisons une intégration par parties :

$$I = [-\text{Lnx}/2(x^2 - 1)] + \int [1/2x(x^2 - 1)]dx = [-\text{Lnx}/2(x^2 - 1)] + 1/2 \int [1/x(x^2 - 1)]dx$$

Notons par J la deuxième intégrale :

$$J = \int [1/x(x^2 - 1)]dx$$

$$1/x(x^2 - 1) = a/x + b/(x - 1) + c/(x + 1)$$

On en déduit : $a = -1$, $b = 1/2$, $c = 1/2$

$$2J = -2 \int dx/x + \int dx/(x+1) + \int dx/(x-1)$$

$$J = -\ln x + \ln(x^2 - 1)^{1/2} = \ln[(x^2 - 1)^{1/2}/x]$$

D'où :

$$I = [-\ln x/2(x^2 - 1)] + \ln[(x^2 - 1)^{1/2}/x]$$

$$2) I(u) = -(\ln u)/2(u^2 - 1) + (\ln 2)/6 + \{\ln [(u^2 - 1)^{1/2}/u] - \ln (3^{1/2}/2)\}$$

$$3) \text{ Quand } u \rightarrow +\infty, I(u) \rightarrow (\ln 2)/6 - \ln (3^{1/2}/2) \approx 0,26.$$

Problème

Partie I :

$$1) f(x) = \ln(1 + e^x).$$

Dérivées :

$$f'(x) = e^x/(1 + e^x) > 0 \quad \forall x$$

$$f''(x) = e^x/(1 + e^x)^2 > 0 \quad \forall x$$

Puisque f' est positive, f est croissante.

Asymptotes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x)/x \rightarrow 1$$

$$y - x = \ln(1 + e^{-x}) \rightarrow 0$$

La droite $y = x$ est asymptote quand $x \rightarrow +\infty$; on en déduit également que la courbe est au-dessus de son asymptote.

Tangente en $x=0$:

$$f'(0) = 1/2$$

Intersection avec l'axe vertical :

$$x = 0 \Rightarrow y = \ln 2 = 0,693$$

2) Soit l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$

2a) $d(x) = (x^2 + 4x + 8 \ln 2)/8 - \ln(1 + e^x)$.

$$d'(x) = x/4 + 1/2 - e^x/(1 + e^x); d'(0) = 0; d'(1) = 3/4 - e/(e+1)$$

$$d''(x) = 1/4 - e^x/(1 + e^x)^2; d''(0) = 0; d''(1) = 1/4 - e/(e+1)^2$$

$$d'''(x) = e^x(1 + e^x)(e^x - 1)/(1 + e^x)^4 > 0$$

d est donc croissante de $d(0) = 0$ à $d(1) = 1/8 + 1/2 + \ln 2 - \ln(1+e) = 0,005$

Donc $0 \leq d(x) \leq M$, où $M = 0,005$.

On en déduit : $0 \leq g(x) - f(x) \leq M$, c'est-à-dire $g(x) - M \leq f(x) \leq g(x)$.

D'où : $A - M \leq I \leq A$

où A est l'intégrale $\int_{[0,1]} (x^2 + 4x + 8 \ln 2)/8 dx = 0,985$.

$$0,98 \leq I \leq 0,985$$

3) $k \neq 0$.

$$D(k) = \{x / e^x + k > 0\}$$

1^{er} cas : $k > 0$

$$D(k) = \mathbb{R}$$

2^{ème} cas : $k < 0$

$$e^x > -k \Leftrightarrow x > \ln(-k)$$

4) A tout réel k , on associe la fonction f_k définie, pour $x \in D(k)$, par $f_k(x) = \ln(e^x + k)$.

$$f'(x) = e^x/(e^x + k)$$

1^{er} cas : $k > 0$

$$f'(x) > 0$$

Sur \mathbb{R} , f croît de $\ln k$ à $+\infty$.

Remarque : si $k < 1$, la courbe associée à f_k coupe l'axe des abscisses en un point x tel que $e^x = 1 - k$, soit $x = \ln(1 - k)$.

Par contre, si $k \geq 1$, la courbe associée à f_k est au-dessus de l'axe des abscisses.

Asymptote :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \ln k$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = +\infty$$

$$f(x)/x \rightarrow 1$$

$$y - x = \ln(1 + ke^{-x}) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

La droite $y = x$ est asymptote.

Position de la courbe par rapport à l'asymptote :

$$y - x = \ln(1 + ke^{-x}) \approx ke^{-x} > 0 \text{ si } k > 0, < 0 \text{ si } k < 0.$$

Tangente :

La pente en $x = 0$ est $y'(0) = 1/(1 + k)$

2^{ème} cas : $k < 0$

$x > \text{Ln}(-k)$

La fonction f_k croît de $-\infty$ à $+\infty$, coupant l'axe des abscisses en $\text{Ln}(1 - k)$, avec une pente en ce point égale à $(1 - k)$.

5) Soit à montrer que, pour $k > 0$, $f_k(x + \text{Ln} k) = f(x) + \text{Ln} k$

$$f_k(x + \text{Ln} k) = \text{Ln}(e^{x+\text{Ln}k} + k) = \text{Ln}(ke^x + k) = \text{Ln}k + \text{Ln}(e^x + 1) = f(x) + \text{Ln} k$$

Pour construire la courbe $C(k)$ représentative de f_k , on remarque que $f_k(u) = f(u - \text{Ln} k) + \text{Ln} k$. Donc pour passer d'un point de C au point correspondant de $C(k)$, on fait d'abord une translation de $-\text{Ln} k$ parallèlement à l'axe des abscisses, puis une translation de $\text{Ln} k$ parallèlement à l'axe des ordonnées.

6) Soit Δ la première bissectrice, d'équation $y = x$.

Soit M de coordonnées (a, b) ; M' , symétrique de M par rapport à Δ a pour coordonnées (b, a) .

On suppose que $M \in C(k)$ associée à f_k , c'est-à-dire que $f_k(x) = \text{Ln}(e^x + k)$.

Soient X et Y les coordonnées de M' : $X = y$, $Y = x$.

$$X = \text{Ln}(e^Y + k) \Leftrightarrow e^X = e^Y + k \Leftrightarrow e^Y = e^X - k \Leftrightarrow Y = \text{Ln}(e^X - k).$$

Partie II :

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par :

$$f_n(x) = e^{-nx}/(1 + e^x)$$

$$1) f_0(x) = 1/(1 + e^x)$$

$$f'_0(x) = -e^x/(1 + e^x)^2 < 0$$

f_0 est décroissante de 1 (en $-\infty$) à 0 (en $+\infty$).

$$\text{En } x = 0, f_0(x) = 1/2.$$

$$f'_0(0) = -1/4$$

Soit S le point de coordonnées $(0, 1/2)$.

Faisons le changement d'origine pour un point courant $M(x, y)$ en prenant pour nouvelle origine S : $X = x$, $Y = y - 1/2$.

$$y = 1/(1 + e^x) \Leftrightarrow Y + 1/2 = 1/(1 + e^x) \Leftrightarrow Y = 1/(1 + e^x) - 1/2 = (1 - e^x)/2(1 + e^x)$$

Le symétrique de M par rapport à S donne le point $M'(-X, -Y)$.

$$(1 - e^{-X})/2(1 + e^{-X}) = (e^X - 1)/2(1 + e^X) = -Y.$$

2) On se place dans le cas général : $n \geq 1$.

$$f_n'(x) = -e^{-nx} [n + (n+1)e^x] / (1 + e^x)^2 < 0$$

La fonction $f_n(x)$ décroît donc de $+\infty$ (pour $x \rightarrow -\infty$) à 0 (pour $x \rightarrow +\infty$).

En $x = 0$, $f_n(0) = 1/2$ et $f_n'(0) = -(2n+1)/4$

On remarque que pour $x = 0$, $y = 1/2$ pour tout n ; le point S appartient à toutes les courbes $\Gamma(n)$ associées aux fonctions f_n .

3) Pour tout n , on définit la suite $v(n)$ par :

$$v(n) = \int_0^1 e^{-nx} dx$$

On peut faire le calcul explicite de $v(n)$; en faisant le changement de variable $u = e^{-x}$, on obtient $v(n) = \int_{[1/e, 1]} u^{n-1} du = (1 - e^{-n})/n$.

Pour montrer que $v(n)$ est décroissante, il suffit de remarquer que $e^{-(n+1)x} = e^{-nx} \cdot e^{-x}$

Comme $x \in [0, 1]$, $e^{-x} \leq 1$ et donc $e^{-(n+1)x} \leq e^{-nx}$

En intégrant, on a donc de façon évidente : $v(n+1) \leq v(n)$

A partir de la forme explicite de $v(n) = (1 - e^{-n})/n$, on a $v(n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

De même, $nv(n) = (1 - e^{-n}) \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow +\infty$.

4) Pour tout n , on définit la suite $u(n)$ par :

$$u(n) = \int_0^1 f_n(x) dx$$

4a) Pour $x \in [0, 1]$, il est évident que $2 \leq e^x + 1 \leq 2e^x$

On en déduit : $1/2e^x \leq 1/(e^x + 1) \leq 1/2$

Et donc $f_n(x) = e^{-nx}/(1 + e^x)$ est entre $e^{-nx}/2e^x = e^{-(n+1)x}/2$ et $e^{-nx}/2$.

En intégrant f_n entre 0 et 1, on obtient : $v(n+1)/2 \leq u(n) \leq v(n)/2$, c'est-à-dire la double inégalité recherchée.

4b) Pour déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u(n)$, l'encadrement précédent et la question (3) permettent d'établir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u(n) = 0$.

De même, en multipliant par n , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu(n) = 1/2$.

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

1) Déterminons les coordonnées de Q_i .

Il est à l'intersection de la droite $y = ax$ et de la droite perpendiculaire à D_a et passant par le point M_i , d'équation :

$$(y - y_i)/(x - x_i) = - 1/a$$

$$\text{ou encore : } y = - (x - x_i)/a + y_i$$

Les coordonnées du point Q_i sont solutions du système :

$$y = ax$$

$$y = - (x - x_i)/a + y_i$$

On obtient :

$$x(Q_i) = (x_i + ay_i)/(a^2 + 1)$$

$$y(Q_i) = a(x_i + ay_i)/(a^2 + 1)$$

$$(M_iQ_i)^2 = (x(Q_i) - x_i)^2 + (y(Q_i) - y_i)^2$$

En développant, on obtient $(M_iQ_i)^2 = [(ay_i - a^2x_i)^2 + (ax_i - y_i)^2]/(a^2 + 1)^2$

$$\text{D'où } Q(a) = [(a^2 + 1)B + a^2(a^2 + 1)A - 2a(a^2 + 1)C]/(a^2 + 1)^2$$

$$= a^2A/(a^2 + 1) + B/(a^2 + 1) - 2aC/(a^2 + 1)$$

Dérivons par rapport à a .

$$Q'(a) = 2 [Ca^2 + a(A - B) - C]/(a^2 + 1)^2$$

$$Q'(a) = 0 \Leftrightarrow Ca^2 + a(A - B) - C = 0$$

$\Delta = (A - B)^2 + 4C^2 > 0$; il existe donc deux solutions a_1 et a_2 :

$$a_1 = (B - A + [(A - B)^2 + 4C^2]^{1/2})/2C$$

$$a_2 = (B - A - [(A - B)^2 + 4C^2]^{1/2})/2C$$

Par ailleurs, on remarque dans l'équation $Ca^2 + a(A - B) - C = 0$ que le produit des racines est égal à -1 .

Les deux droites D_{a_1} et D_{a_2} , de pentes respectives a_1 et a_2 , sont donc perpendiculaires.

2) Soit à calculer $H(a) = \sum_{i=1}^n (M_i H_i)^2$.

Le point H_i a pour coordonnées (x_i, ax_i) .

$$(M_i H_i)^2 = (ax_i - y_i)^2$$

$$H(a) = \sum_i (ax_i - y_i)^2 = a^2 A - 2aC + B$$

$$H'(a) = 2aA - 2C = 0 \text{ et } a^* = C/A$$

Problème 2

1) On montre que $S(E)$ est un sous-espace vectoriel de $R[X]$ car $S(E) \subset R[X]$ et $S(E)$ est non vide car le polynôme nul vérifie E .

Il est simple d'établir que si P et Q sont solutions de E , $aP + bQ$ appartient à $S(E)$.

2) Soit $a_n x^n$ le terme du plus haut degré de P_n , solution de E .

En égalant les termes de degré n , on a :

$$n(n - 1) + 4n = a$$

$$\Rightarrow a = n(n + 3)$$

$$3) Q_n'(x) = -(-1)^n P_n'(-x)$$

$$Q_n''(x) = (-1)^n P_n''(-x)$$

On omet l'indice n pour simplifier les notations.

$$\text{Donc : } (x^2 - 1)Q''(x) + 4xQ'(x) = (-1)^n [(x^2 - 1)P''(-x) - 4xP'(-x)] = a P(-x)$$

$$\text{On en déduit : } (x^2 - 1)Q''(x) + 4xQ'(x) = (-1)^n aP(-x) = a Q(x)$$

Q est donc solution de E.

Supposons que $P - Q$ ne soit pas le polynôme nul.

Alors, le degré de $P - Q$ est inférieur ou égal à n.

Soit $a_n x^n$ le terme du plus haut degré de P, $(-1)^n a_n (-x)^n$ est le terme de plus haut degré de Q. Donc dans $P - Q$ il n'y a pas de terme de degré n ; notons r le degré de $P - Q$, $r \leq n - 1$.

Or $P - Q$ est solution de E, puisque P et Q sont solutions de E et $S(E)$ est un espace vectoriel.

D'après la première question, $a = r(r + 3)$, ce qui est impossible car, P étant solution, on a aussi $a = n(n + 3)$ et $r < n$.

Donc $P - Q$ est le polynôme nul, $P = Q$.

On a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$, ce qui prouve que P_n a la même parité que n.

$$4) P_0 = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = x^2 - 1/5$$

$$P_3(x) = x^3 + 5x^2/9 + 3x/7 - 1/9$$

Problème 3

1a) Il est évident que si f_1 et f_2 sont solutions de (E_1) , alors pour tous λ et μ réels, on a :

$$(\lambda f_1 + \mu f_2)'' - 3(\lambda f_1 + \mu f_2)' + 2(\lambda f_1 + \mu f_2) = 0$$

$(\lambda f_1 + \mu f_2)$ vérifie aussi la relation (E_1) .

1b) Ecrivons que $y = e^{ax}$ vérifie la relation (E_1) .

$$(a^2 - 3a + 2) e^{ax} = 0, \forall x$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

D'où deux valeurs pour a : $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$.

Les fonctions e^x et e^{2x} sont solutions de (E_1) .

1c) La forme générale des solutions de (E_1) , d'après (1a), est donc $(\lambda e^x + \mu e^{2x})$.

2) La courbe représentant $y = e^{3x}$ passe par le point $(0, 1)$ et a pour dérivée en : $y'(0) = 3$.

La courbe représentant $u = \lambda e^x + \mu e^{2x}$ est telle que $u(0) = \lambda + \mu$ et $u'(0) = \lambda + 2\mu$

Les valeurs particulières de λ et μ correspondant sont donc telles que :

$$\lambda + \mu = 1$$

$$\lambda + 2\mu = 3$$

D'où : $\lambda = -1$ et $\mu = 2$

$$\Rightarrow u(x) = -e^x + 2e^{2x}$$

3) k étant un réel strictement positif, montrons que les fonctions $h_k(x) = -k^2 e^x + 2k e^{2x}$ vérifient la relation (E_1) .

$$h_k'(x) = -k^2 e^x + 4k e^{2x}$$

$$h_k''(x) = -k^2 e^x + 8k e^{2x}$$

On vérifie facilement que $h_k''(x) - 3 h_k'(x) + 2 h_k(x) = 0$

4a) Soit maintenant l'équation : $(E_2) y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2$

Cherchons un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ solution de (E_2) .

$$P'' - 3P' + 2P = 2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = -x^2 + x + 2$$

$$\text{ou encore : } 2ax^2 + 2x(b - 3a) + 2a - 3b + 2c = -x^2 + x + 2$$

Par identification : $a = -1/2$, $b = -1$, $c = 0$

$$4b) f(x) = g(x) - x^2/2 - x \Rightarrow f'(x) = g'(x) - x - 1 \text{ et } f''(x) = g''(x) - 1$$

On en déduit que :

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) - x^2 + x + 2$$

$$\text{Donc } g \text{ solution de } (E_1) \Leftrightarrow g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = -x^2 + x + 2$$

$$\Leftrightarrow f \text{ solution de } (E_2)$$

Compte tenu des résultats de la question (1c), les fonctions f solutions de (E_2) sont de la forme : $\lambda e^x + \mu e^{2x} - x^2/2 - x$.

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

Question 1

- a) Première méthode : il y a 1040 dossiers pendant 104 semaines, cela donne $1040/104 = 10$ accidents par semaine.
Deuxième méthode : il faut utiliser le tableau de distribution et la définition de l'espérance mathématique. En prenant comme centre de classe la valeur 3 pour la première classe, on trouve 9,99 accidents par semaine.
- b) La variance du nombre hebdomadaire d'accidents en prenant le centre des classes est égale à 10,85. L'écart-type est la racine carrée de la variance et vaut 3,29 accidents.
- c) Par interpolation linéaire, la médiane de la distribution (valeur de la variable qui sépare la population en deux parties égales) est égale à 9,32 accidents.

$$9 + \frac{11-9}{73-48} (52-48) = 9,32$$

Question 2

- a) La population est constituée des semaines. On dispose de 104 semaines (échantillon). Ce que l'on observe, c'est le nombre x d'accidents hebdomadaires qui surviennent aux C clients.
- b) On obtient une estimation ponctuelle de la moyenne à 10 (cf. question précédente).

Question 3

- a) $10/7 = 1,43$ accidents par jour.
- b) $10/14 = 0,71$ accidents par demi-journée.
- c) le nombre d'accidents qui se produisent au cours d'une demi-journée suit une loi binomiale. L'espérance mathématique est donc égale à p . Sa variance est $p(1-p)$. La valeur estimée pour p est 0,71.

Question 4

- a) En une semaine, il y a 7 fois 24 tranches de temps, soit 148. Le nombre d'accidents qui se produisent en une semaine est une loi binomiale. Donc, l'espérance mathématique est $148 p'$ et la variance est $148 p'(1-p')$ avec comme valeur estimée pour p' : $10/148$.
- b) $E = 7np'$ et $V = 7np'(1-p')$
On veut que $E-V$ soit inférieur à 0,1. On trouve alors n supérieur à 142,9.

Exercice n° 2

Il n'y a pas de corrigé type pour cet exercice. Toutefois, on pouvait observer que :

- l'expérience professionnelle et la réputation de l'école expliquent en grande partie les disparités constatées ;
- les spécialisations sont rentables lorsqu'elles ont une orientation appliquée ou lorsqu'elles sont effectuées à l'étranger ;
- les inégalités homme/femme persistent ;
- ...