AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Question 1

$$P(A \cap D) = P(D/A) \times P(A) = 0{,}001$$

Question 2

$$P(D) = P(D/A) \times P(A) + P(D/B) \times P(B) + P(D/C) \times P(C) = 0{,}001 + 0{,}030 + 0{,}030 = 0{,}061$$

Question 3

$$P(A/D) = P(A \cap D)/P(D) = 1/61$$

Question 4

La probabilité cherchée est égale à 1 – P (les 8 compteurs ne sont plus sous garantie). Les huit compteurs sont indépendants les uns des autres. Cela revient à chercher $1 - P(\overline{A}/D)^8 . Hors \;\; P(\overline{A}/D) = P(\overline{A} \cap D)/P(D) = 60/61$

Exercice n° 2

Question 1

En utilisant la définition de la probabilité comme étant le rapport entre le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles, on obtient p(A) = 1/15 ; p(B) = 7/15 et p(C) = 7/15

Question 2

X correspond au total des valeurs des deux pièces tirées. Les valeurs prises par la variable X sont 20 centimes d'euros (tirage de 2 pièces de 10 centimes d'euros), 60 centimes d'euros (tirage d'une pièce de 10 centimes d'euros et d'une pièces de 50 centimes d'euros), 1 euro (tirage de 2 pièces de 50 centimes d'euros). D'où P(X = 20) = p(B) ; P(X = 60) = p(C) et P(X=100) = p(A)

L'espérance de X vaut 44 centimes d'euros

Question 3

Pour un tirage donné, la probabilité p d'obtenir une somme supérieure à 50 centimes d'euros est la somme de p(X=60) et de p(X=100) donc k = 8 /15

Soit E l'évènement « on tire deux fois une somme supérieure à 50 centimes d'euros », l'évènement E est réalisé lorsque 2 des 3 tirages sont tels que le total est supérieur à 50 centimes d'euros et lorsque l'autre tirage donne une somme inférieure à 50 centimes d'euros (c.a.d. égale à 20 centimes d'euros). Par suite,

$$P(E) = C_3^2 \; k^2 \; (1-k) \; = \; 448/1125$$

Exercice n° 3

Question 1

Le module cherché vaut 1/3 et un argument de z_1 est π/4

Question 2

Soit P(n) la propriété cherchée, celle-ci est valable pour n=1. On la suppose vraie pour le rang n et on cherche à la vérifier pour le rang n+1. Ce qui ne pose aucun problème.

En ce qui concerne le module, on trouve $1/3^n$ et comme argument nπ/4, par utilisation de la formule de Moivre.

Question 3

a) zn est réel si et seulement si nπ/4 = k π, c'est-à-dire n=4k (multiple de 4)
b) zn est imaginaire pur si et seulement si nπ/4 = k π/2, c'est-à-dire n=2k mais non égal à 4k, ou encore si n est un entier naturel pair non multiple de 4

Question 4

La limite cherchée est nulle car 1/3 est inférieur à 1

Exercice n° 4

En effectuant un changement de variable pour ramener l'étude au point zéro afin d'utiliser les développements limités connus (u = x-2), on obtient comme équivalent du numérateur N et du dénominateur D :

$$N = 2\left(\frac{u}{8} - \frac{u^2}{8x16} + u^2\varepsilon(u)\right)$$

$$D = 3\left(\frac{u}{18} - \frac{u^2}{8x81} + u^2\varepsilon(u)\right)$$

Ensuite, on trouve que la fonction y qui est égale à N/D - (3/2) a comme équivalent -5u/96

Exercice n° 5

En multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur (de façon à faire disparaître la fonction racine au dénominateur), l'intégrale cherchée se simplifie et le problème se ramène au calcul de l'intégrale $J = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$. En effet, les autres termes du calcul sont des fonctions simples pour lesquelles l'intégration ne pose aucune difficulté. En effectuant une intégration par parties sur J, le problème se ramène au calcul de l'intégrale $K = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. Pour finir, on réalise un changement de variable en posant $\sqrt{1+x^2} = x+t$ et on trouve le résultat suivant : $I = -\frac{2}{x} + x - 2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - 2\ln\left|\sqrt{1+x^2} - x\right| + Cste$

Exercice n° 6

Question 1

Si a = 0, la dimension de Ker f est 1 et une base du noyau est le vecteur (1,0,0) . Si a est différent de 0, f est injective et dim Ker f = 0

Pour le sous espace vectoriel « image », si a est différent de 0, Im f = R^3 . Si a est nul, la dimension de Imf est 2. Une base de ce sous espace vectoriel est constitué des vecteurs (1,2,1) et (1,1,2)

Question 2

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a-1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

Question 1

La moyenne obtenue est égale à 1,73 nuitées et l'écart type vaut 0,91 nuitées.

Question 2

1) $f_{2000} = 0{,}478$ et $f_{2004} = 0{,}437$
2) p = 0,458 et s = 0,03
3) x = 0,041 et t = 1,36 donc P(X>x) est voisin de 0,09
4) La probabilité que nous constations la différence observée est donc inférieure à 10%. Hors, nous l'observons. Si l'on accepte un risque de se tromper supérieur à la probabilité trouvée à la question précédente, on peut affirmer que les taux de réponse ont « bel et bien » diminués en 4 ans.

Question 3

Si l'on note, conformément à ce qu'indiquait dans l'énoncé :

- Q_0 le nombre d'arrivées en 2003. Q_0 prend trois valeurs, correspondant à chacun des départements.
- Q_1 le nombre d'arrivées en 2004. Q_1 prend trois valeurs, correspondant à chacun des départements.
- P_0 la durée du séjour en 2003. P_0 prend trois valeurs, correspondant à chacun des départements.
- P_1 la durée du séjour en 2004. P_1 prend trois valeurs, correspondant à chacun des départements.

$\Sigma P_0 Q_0 = 2.880.000$
$\Sigma P_1 Q_0 = 2.950.000$
$\Sigma P_0 Q_1 = 2.901.000$
$\Sigma P_1 Q_1 = 2.970.000$

L'indice de Laspeyres des prix vaut 102,4 ($\Sigma P_1 Q_0 / \Sigma P_0 Q_0$) et l'indice de Paasche des quantités vaut 100,7 ($\Sigma P_1 Q_1 / \Sigma P_1 Q_0$). Le nombre de nuitées entre 2003 et 2004 sur la région a augmenté de 3,1%. Cette hausse est donc du principalement à l'effet « durée du séjour » (prix).

Question 4

Sur 13 ans, l'augmentation moyenne annuelle constatée s'élève à 0,51%
Pour atteindre le seuil des 2.800.000 nuitées, il faudra encore 11 ans. Ce sera donc en 2014 que ce chiffre sera atteint.

Question 5

Il n'y a pas de corrigé type mais on peut signaler :

- que la saison 2004 est une bonne année puisque le nombre de nuitées a augmenté (+2,8%)
- que la venue des estivants étrangers explique cette augmentation, particulièrement dans le département C (+45,7% de nuitées étrangères)
- que les britanniques sont les plus nombreux parmi les touristes étrangers
- que la durée moyenne de séjour progresse dans tous les départements pour la clientèle étrangère mais qu'elle régresse pour la clientèle française
- que le pic de la saison touristique correspond au mois d'août
- qu'en 2004, le taux d'occupation en juin a bien progressé
- …