AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 :

On appelle nombre parfait un nombre entier naturel a dont la somme des diviseurs est égale à 2a.

1) Parmi les entiers suivants, y en a-t-il de parfaits : 3, 6, 10, 14, 20, 28 ?

3 est divisible par 1 et 3 : 1 + 3 = 4 non parfait
6 est divisible par 1, 2, 3, 6 : 1 + 2 + 3 + 6 = 12 parfait
10 est divisible par 1, 2, 5, 10 / somme = 18 non parfait
14 est divisible par 1, 2, 7, 14 : somme = 24 non parfait
20 est divisible par 1, 2, 4, 5, 10, 20 : somme = 42 non parfait
28 est divisible par 1, 2, 4, 7, 14, 28 : somme = 56 parfait

2) Soit $a = 2^n (2^{n+1} – 1)$, $n \in N$. On suppose que $(2^{n+1} – 1)$ est premier. Montrer que a est un nombre parfait.

Notons $u = (2^{n+1} – 1)$.
a est divisible par $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n, u, 2u, 2^2u, \ldots, 2^nu$.

La somme des diviseurs de a est donc : $S = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + u + 2u + 2^2u + \ldots + 2^nu$.
Soit $A = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$, et $B = u + 2u + 2^2u + \ldots + 2^nu$.

$A = (1 – 2^{n+1})/(1 – 2) = 2^{n+1} – 1$

$B = uA = u(2^{n+1} – 1)$
$S = A + B = A(1 + u) = (2^{n+1} – 1)(1 + u) = (2^{n+1} – 1)2^{n+1} = 2.(2^{n+1} – 1)2^n = 2a$

Exercice 2 :

On appelle nombre polymonadique tout nombre entier ne s'écrivant qu'avec le chiffre 1 : 1, 11, 111, etc. On note P(n) le nombre polymonadique s'écrivant avec n chiffres 1.

1) Montrer que $P(n) = (10^n - 1)/9$

$P(n) = 10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1 = (1 - 10^n)/(1 - 10) = (10^n - 1)/9$

2) Montrer que, pour n pair, P(n) est divisible par 11

On sait que $(a^n - b^n) = (a - b)($ a

7.24 720
n-2 – 1)/9 1 mw(n-2)Tj 2 0 585.6225 0.0006 Tc0.00 Tw19.9 (– b)

Problème :

Préambule :

Soit u_n, $n \in N^*$, la suite définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1$, avec $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$.
Il est évident par récurrence que la suite u_n est positive et croissante.

Partie A :

1) On définit la suite v_n, $n > 0$, par : $v_n = u_n + 1$.
Ecrire la relation existant entre v_{n+2}, v_{n+1} et v_n. Montrer que la suite v_n est positive et croissante.

$u_n = v_n - 1$ d'où un reportant dans l'équation de définition de u_n :
$v_{n+2} - 1 = v_{n+1} - 1 + v_n - 1 + 1$
$v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ avec $v_1 = 2$ et $v_2 = 3$.
On reconnaît la suite de léonard de Pise, dit Fibonacci (XIIIème xiècle).

Remarque : il est évident que les suites u_n et v_n sont positives et croissantes (sommes de termes positifs).

2) Donner l'expression de v_n en fonction de n.

L'équation caractéristique associée est $r^2 - r - 1 = 0$.
Ses racines sont :
$r_1 = (1 - \sqrt{5})/2$ et $r_2 = (1 + \sqrt{5})/2$

La forme générale de v_n est : $v_n = a\,(r_1)^n + b(r_2)^n$
$v_1 = 2 = ar_1 + br_2 \Rightarrow a(1 - \sqrt{5}) + b(1 + \sqrt{5}) = 4$

$v_2 = 3 = a\,(r_1)^2 + b(r_2)^2 \Rightarrow a(3 - \sqrt{5}) + b(3 + \sqrt{5}) = 6$

D'où $a = (5 - 3\sqrt{5})/10$ et $b = (5 + 3\sqrt{5})/10$

3) En raisonnant par récurrence, démontrer les relations suivantes :

(R1) $(v_{2n})^2 = v_{2n-1}.v_{2n+1} - 1$

(R2) $(v_{2n+1})^2 = v_{2n}.v_{2n+2} + 1$

On sait que $v_1 = 2$, $v_2 = 3$, $v_3 = 5$, et $v_4 = 8$.
$3^2 = 2 \times 5 - 1$; R1 est vérifiée pour n = 1.
De même pour R2, $5^2 = 3 \times 8 + 1$.
Supposons R1 et R2 vraies au rang n.

$(v_{2n+2})^2 = v_{2n+2}\,(v_{2n+1} + v_{2n}) = v_{2n+2}.v_{2n+1} + v_{2n+2}.v_{2n} = v_{2n+2}.v_{2n+1} + (v_{2n+1})^2 - 1$
$= v_{2n+1}\,(v_{2n+2} + v_{2n+1}) - 1$
$= v_{2n+1}.v_{2n+3} - 1$
$\Rightarrow$ R1 est vraie au rang n+1

De même, $(v_{2n+3})^2 = v_{2n+3}(v_{2n+2} + v_{2n+1}) = v_{2n+3}.v_{2n+2} + v_{2n+3}.v_{2n+1}$
$= v_{2n+3}.v_{2n+2} + (v_{2n+2})^2 + 1$
$= v_{2n+2}.(v_{2n+3} + v_{2n+2}) + 1$
$= v_{2n+2}.v_{2n+4} + 1$
$\Rightarrow$ R2 est vraie au rang n+1

4) Déduire de la question (3) la relation :

$$(R3)\quad (u_{2n+1} - u_{2n-1})^2 = u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$$

On a : $v_{2n} = (v_{2n+1} - v_{2n-1}) = (u_{2n+1} - u_{2n-1})$
D'après (R1) : $(v_{2n})^2 = (u_{2n+1} - u_{2n-1})^2 = (u_{2n+1} + 1)(u_{2n-1} + 1) - 1 = u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$.

5) Montrer la relation (R4) et en déduire (R5):

$$(R4)\quad (u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = 5u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$$

$$(R5)\quad 5u_{2n-1}.u_{2n+1} = (u_{2n+1} + u_{2n-1})(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1)$$

De façon évidente, on a :
$(u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = (u_{2n+1} - u_{2n-1})^2 + 4u_{2n-1}.u_{2n+1}$
D'après le résultat de la question 4, on a donc :
$(u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1} + 4u_{2n-1}.u_{2n+1}$
D'où (R4) : $(u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = 5u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$

La relation R5 est évidente :
$5u_{2n-1}.u_{2n+1} = (u_{2n-1} + u_{2n+1})^2 - (u_{2n+1} + u_{2n-1}) = (u_{2n+1} + u_{2n-1})(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1)$

Partie B :

L'objectif de cette partie est d'utiliser les résultats de la partie A pour étudier l'existence de nombres premiers dans la suite u_n, ayant un rang impair.

6) A partir de la relation (R5), démontrer que si u_{2n-1} est premier, il divise soit u_{2n+1}, soit $u_{2n+1} - 1$.

Soit donc la relation (R5) : $5u_{2n-1}.u_{2n+1} = (u_{2n+1} + u_{2n-1})(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1)$.
Si u_{2n-1} est premier, il divise soit $(u_{2n+1} + u_{2n-1})$, soit $(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1)$.
On a donc :
$(u_{2n+1} + u_{2n-1}) = a.\, u_{2n-1}$
ou : $u_{2n+1} = (a - 1)\, u_{2n-1}$
De même : $(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1) = b.\, u_{2n-1}$
ou encore : $(u_{2n+1} - 1) = (b - 1).\, u_{2n-1}$

7) On considère le premier cas : u_{2n-1} divise u_{2n+1}, c'est-à-dire $u_{2n+1} = q.\ u_{2n-1}$, q entier.

7a) Montrer que $q > 1$.

Evident : la suite (u_n) est croissante.

7b) A partir de (R4), en déduire : (R6) $(q^2 - 3q + 1)\ u_{2n-1} = 1 + q$

Rappelons la relation (R4) : $(u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = 5u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$
Remplaçons u_{2n+1} par $q.\ u_{2n-1}$: $(1 + q)^2(u_{2n-1})^2 = 5q(u_{2n-1})^2 + u_{2n-1} + q.\ u_{2n-1}$
Il s'en suit, en simplifiant : $(q^2 - 3q + 1)\ u_{2n-1} = 1 + q$

7c) Montrer que les seules valeurs possibles pour q dans la relation (R6) sont $q = 3$ ou 4. Le terme u_{2n-1} est-il alors un nombre premier ?

Le trinôme $(q^2 - 3q + 1)$ est positif si $q < (3 - \sqrt{5})/2 = 0{,}38$ ou $q > (3 + \sqrt{5})/2 = 2{,}62$, c'est-à-dire comme q est entier si $q = 0$ ou $q \geq 3$.
Donc $q = 1$ ou 2 conduit à u_{2n-1} négatif, ce qui est impossible.
On remarque ensuite que pour $q > 4$, le rapport $u_{2n-1} = (1 + q)/(q^2 - 3q + 1)$ est inférieur à 1 ; impossible encore.
Les seules valeurs possibles pour q sont donc $q = 3$ ou $q = 4$.

Pour $q = 3$, $u_{2n-1} = 4$: non premier
Pour $q = 4$, $u_{2n-1} = 1$: non premier (par convention)

8) Dans cette question, on considère le deuxième cas : u_{2n-1} divise $u_{2n+1} - 1$, c'est à dire que l'on a $(u_{2n+1} - 1) = q'.\ u_{2n-1}$, q' entier.

8a) Montrer que $q' > 1$.

Evident.

8b) Démontrer (R7) $(q'^2 - 3q' + 1)\ u_{2n-1} = 4 - q'$

Partons de la relation (R5) : $5u_{2n-1}.u_{2n+1} = (u_{2n+1} + u_{2n-1})(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1)$.
Il suffit de remplacer u_{2n+1} par $1 + q'.\ u_{2n-1}$ pour établir la relation (R7).

8c) Montrer que la seule valeur possible pour q' dans la relation (R7) est $q' = 3$? Dans ce cas, le terme u_{2n-1} est-il alors un nombre premier ?

Soit donc $(q'^2 - 3q' + 1)\ u_{2n-1} = 4 - q$.
Comme pour la question 7c, le trinôme $(q'^2 - 3q' + 1)$ est positif si $q' = 0$ (impossible) ou $q' \geq 3$.
Or pour $q' \geq 4$, $4 - q' \leq 0$, donc $u_{2n-1} \leq 0$, ce qui est impossible.
Seule valeur possible : $q' = 3 \Rightarrow u_{2n-1} = 1$, non premier par convention.

9) Un terme de rang impair de la suite u_n peut-il être un nombre premier ?

On déduit des questions 7 et 8 qu'aucun terme de rang impair de la suite u_n ne peut être premier.

Partie C :

L'objectif de cette partie est d'utiliser les résultats de la partie A pour étudier l'existence de nombres premiers dans la suite u_n ayant un rang pair.

10) En utilisant la relation (R2), démontrer :

(R8) $[(u_{2n+2} + 1) + (u_{2n} + 1)]^2 = 5(u_{2n} + 1)(u_{2n+2} + 1) + 1$

En déduire :

(R9) $5u_{2n}.u_{2n+2} = (u_{2n} + u_{2n+2} - 2)(u_{2n} + u_{2n+2} + 1)$

Considérons (R2) : $(v_{2n+1})^2 = v_{2n}.v_{2n+2} + 1$

$v_{2n+1} = v_{2n+2} - v_{2n}$
D'où : $(v_{2n+1})^2 = (v_{2n+2} - v_{2n})^2 = (v_{2n+2} + v_{2n})^2 - 4v_{2n+2}.v_{2n} = v_{2n}.v_{2n+2} + 1$
$\Rightarrow (v_{2n+2} + v_{2n})^2 = [(u_{2n+2} + 1) + (u_{2n} + 1)]^2 = 5v_{2n+2}.v_{2n} + 1 = 5(u_{2n} + 1)(u_{2n+2} + 1) + 1$

Pour démontrer (R9), on part de (R8) :
$[(u_{2n+2} + 1) + (u_{2n} + 1)]^2 = 5(u_{2n} + 1)(u_{2n+2} + 1) + 1 \Leftrightarrow (u_{2n+2} + u_{2n} + 3)(u_{2n+2} + u_{2n} + 1) = 5(u_{2n} + 1)(u_{2n+2} + 1)$
$\Leftrightarrow (u_{2n+2} + u_{2n} + 3)(u_{2n+2} + u_{2n} + 1) = 5u_{2n}.u_{2n+2} + 5 + 5(u_{2n} + u_{2n+2})$

$\Leftrightarrow 5u_{2n}.u_{2n+2} = - 5(1 + u_{2n} + u_{2n+2}) + (u_{2n+2} + u_{2n} + 3)(u_{2n+2} + u_{2n} + 1)$

$\Leftrightarrow 5u_{2n}.u_{2n+2} = (u_{2n} + u_{2n+2} - 2)(u_{2n} + u_{2n+2} + 1)$

11) Démontrer alors que si u_{2n} est premier, il divise $u_{2n+2} - 2$ ou $u_{2n+2} + 1$.

D'après (R9), u_{2n} divise soit $(u_{2n} + u_{2n+2} - 2)$, soit $(u_{2n} + u_{2n+2} + 1)$.
Ecrivons que u_{2n} divise $(u_{2n} + u_{2n+2} - 2)$: alors il existe un nombre entier a tel que :
$(u_{2n} + u_{2n+2} - 2) = a.\ u_{2n} \Leftrightarrow (u_{2n+2} - 2) = (a - 1).u_{2n}$
De même, il existe b tel que $(u_{2n+2} + 1) = (b - 1).u_{2n}$

12) On considère le premier cas : u_{2n} divise $u_{2n+2} – 2$, c'est-à-dire $(u_{2n+2} – 2) = q.\ u_{2n}$, q entier.

12a) Montrer que $q > 1$.

Suite croissante et telle que $u_{2n+2} – u_{2n} > 2$.

12b) Démontrer : (R10) $(q^2 – 3q + 1)\ u_{2n} = 7 – 3q$

En remplaçant u_{2n+2} par $2 + q.\ u_{2n}$ dans l'expression (R9), on obtient (R10) sans difficulté.

12c) Existe-t-il au moins une valeur de q donnant un sens à (R10) ?

On sait que le trinôme $(q^2 – 3q + 1)$ est positif si $q = 0$ (impossible) ou $q \geq 3$. Or pour $q \geq 3$, $7 – 3q < 0$, donc u_{2n} serait < 0, ce qui est impossible.
Si $q = 1$ ou $q = 2$, on a aussi $u_{2n} < 0$.

13) On considère le deuxième cas : u_{2n} divise $u_{2n+2} + 1$, c'est-à-dire $(u_{2n+2} + 1) = q'\ u_{2n}$, q' entier.

13a) Montrer que $q' > 1$.

Suite croissante.

13b) Démontrer : (R11) $(q'^2 – 3q' + 1)\ u_{2n} = 3q' – 2$

Comme en (12b), en remplaçant u_{2n+2} par $q'.\ u_{2n} – 1$ dans l'expression (R9), on obtient aisément (R11).

13c) Montrer que les seuls cas possibles sont $q' = 3, 4$ ou 5. Déterminer alors le(s) seul(s) termes nombre(s) premier(s) de la suite u_n.

$q' = 1$ ou $2 \Rightarrow u_{2n} < 0$
Dès que $q' > 5$, $u_{2n} < 1$
Donc seuls cas possibles : $q' = 3, 4$ ou 5
Si $q' = 3$, $u_{2n} = 7$, premier
Si $q' = 4$, $u_{2n} = 2$, premier
Si $q' = 5$, $u_{2n} = 13/11 \Rightarrow$ impossible

Les seuls nombres premiers de la suite de Fibonacci sont donc 2 et 7.

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 :

Soit le nombre entier $a = 3^{2n} - 2^n$. Montrer que a est divisible par 7.

On sait que $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + \dots\dots\dots + b^{n-1}) = (a - b)\,Q(a, b)$
Donc $3^{2n} - 2^n = 9^n - 2^n = (9 - 2)Q(2, 3) = 7Q(2, 3)$
CQFD

Exercice 2 :

Pour tout entier naturel n, $n \in N$, on définit le nombre $f(n) = 2^{(2^n)} + 1$

1) Calculer f(0), f(1), f(2), f(3)

$n = 0$, $2^0 = 1$, $f(0) = 3$

$n = 1$, $2^1 = 2$, $f(1) = 5$

$n = 2$, $2^2 = 4$, $f(2) = 17$

$n = 3$, $2^3 = 8$, $f(3) = 257$

2) Montrer que : $f(n+1) = (f(n) - 1)^2 + 1$

$f(n+1) = 2^{(2^{n+1})} + 1 = 2^{(2.2^n)} + 1 = 2^{(2^n)}.2^{(2^n)} + 1 =$

Or $2^{(2^n)} = f(n) - 1$, d'où le résultat cherché.

3) Montrer que $f(n) = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} f(k)$

Raisonnons par récurrence :
a) n = 1, f(1) = 5 = 2 + f(0)

b) Supposons la formule vraie au rang n.
D'après la question 2, on a $f(n+1) = (f(n) – 1)^2 + 1 = f^2(n) – 2f(n) +2$

$= f(n).[\, 2 + \prod_{k=0}^{n-1} f(k)] – 2f(n) + 2$

$= 2f(n) + \prod_{k=0}^{n} f(k) – 2f(n) + 2$

$= \prod_{k=0}^{n} f(k) + 2$

Donc vrai au rang n+1

Exercice 3 :

Pour tout entier naturel n, $n \geq 0$, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0, \pi/4]$ par :

$f_n(x) = 1 / \cos^{2n+1}x$

et l'intégrale J(n) par :

$J(n) = \int_0^{\pi/4} f_n(x)\, dx$

1) A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre J(n) et J(n+1) de la forme $J(n+1) = a_n + b_nJ(n)$ où a_n et b_n sont des fonctions de n que l'on explicitera.

Ecrivons $\cos^{-(2n+1)}x = \cos^{-2}x.\cos^{-(2n-1)}x$

$u = \cos^{-(2n-1)}x$
$du = (2n-1) \cos^{(2n-2)}x \,.\, \sin x/ \cos^{(4n-2)}x = (2n-1) \sin x/ \cos^{2n}x$
$dv = \cos^{-2}x$
$v = tg\, x$

$J(n) = [tg\, x. \cos^{-(2n-1)}x]_0^{\pi/4} – \int_0^{\pi/4} (2n-1).\sin x.tg\, x/\cos^{2n}x\, dx$

$= [\sin x/ \cos^{2n}x]_0^{\pi/4} – (2n – 1) \int_0^{\pi/4} \sin^2x/\cos^{2n+1}x\, dx$

$= [\sin x/ \cos^{2n}x]_0^{\pi/4} – (2n – 1) \int_0^{\pi/4} (1 - \cos^2x)/\cos^{2n+1}x\, dx$

$= [\sin x/ \cos^{2n}x]_0^{\pi/4} – (2n – 1) \int_0^{\pi/4} 1/\cos^{2n+1}x\, dx + (2n – 1) \int_0^{\pi/4} 1/\cos^{2n-1}x\, dx$

$J(n) = 2^{n-0,5} – (2n – 1)J(n) + (2n – 1)J(n – 1)$

$2n\ J(n) = 2^{n-0,5} + (2n – 1)J(n – 1)$

$J(n) = 2^{n-0,5}/2n + (2n – 1)J(n – 1)/2n$

On trouve bien une expression de la forme recherchée qui, transposée au rang n+1, donne $a_n = 2^{n+0,5}/2(n+1) = 2^{n-1/2}/(n+1)$ et $b_n = (2n + 1)/2(n+1)$.

2) Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi/4]$, on peut trouver deux réels u et v tels que :

$$1/\cos x = u \cos x/(1 – \sin x) + v \cos x/(1 + \sin x)$$

En réduisant au même dénominateur, on a :

$(1 – \sin x)(1 + \sin x) = u \cos^2 x(1 + \sin x) + v \cos^2 x(1 – \sin x)$

$1 = u + v + (u – v)\sin x$

$u + v = 1$
$u – v = 0$

$\Rightarrow u = v = 1/2$

3) Calculer J(0)

$$J(0) = \int_0^{\pi/4} (1/\cos x)\, dx$$

En utilisant le résultat de la question 2, et en posant $v = 1 – \sin x$ et $w = 1 + \sin x$; quand $x = 0$, $v = 1$, quand $x = \pi/4$, $v = 1 – 2^{-1/2}$; de même, quand $x = 0$, $w = 1$, quand $x = \pi/4$,
$w = 1 + 2^{-1/2}$; on a :

$2J(0) = – \int dv/v + \int dw/w = \mathrm{Ln}\,(1 + 2^{-1/2}) - \mathrm{Ln}\,(1 - 2^{-1/2}) = \mathrm{Ln}[(2^{1/2} + 1)/(2^{1/2} – 1)] =$
$\mathrm{Ln}5,83 = 1,76$
$J(0) = \mathrm{Ln}(1 + 2^{1/2}) = 0,88$

4) Calculer J(2)

On a établi à la question 1 : $J(n) = 2^{n-0,5}/2n + (2n – 1)J(n – 1)/2n$

$J(1) = 2^{1-0,5}/2 + (2 – 1)J(0)/2 = 1,15$

$J(2) = 2^{2-0,5}/4 + (4 – 1)J(1)/4 = 1,57$

Exercice 4 :

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.
A tout entier naturel $n \geq 1$, on associe la fonction f_n définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par :

$\forall x \geq 1$, $f_n(x) = (\text{Ln } x)^n/(n!.x^2)$

1) Déterminer la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Posons $u = x^2$
$(\text{Ln } x)^n/(n!.x^2) = (\text{Ln } u)^n/(2^n\ n!u)$

Or on sait que $\lim_{u\to+\infty} (\text{Ln } u)^a/u^b = 0$ pour a et b > 0.
Donc $\lim_{u\to+\infty} f_n(x) = 0$

2) Etablir précisément le tableau de variations de f_n.

Dérivée :
$f_n'(x) = (\text{Ln } x)^{n-1}(n - 2\text{Ln } x)/(n!.x^3)$

Comme $x \geq 1$, $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow (n - 2\text{Ln } x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{n/2}$

	1		$e^{n/2}$		$+\infty$
f_n'		+	0	-	
f_n	0	$\nearrow$	M(n)	$\searrow$	0

3) On note M(n) la valeur maximale de $f_n(x)$ sur $[1, +\infty[$.
Montrer que $M(n+1) = f_n(e^{(n+1)/2)})/2$.
En déduire que $M(n+1) \leq M(n)/2$.
Quelle est la limite de M(n) quand n tend vers $+\infty$?

Calculons M(n) :

$M(n) = (\text{Ln } e^{n/2})^n/(n!.\ e^n) = (n/2e)^n \ .\ 1/n!$

$M(n+1) = [(n+1)/2e]^n \ .\ 1/(n+1)!$

$f_n(e^{(n+1)/2)}) = (1/n!)\ .\ [(n+1)/2]^n/(e^{n+1}) = (1/n!)\ .\ [(n+1)/2e]^{n+1}\ .\ 2/(n+1)$

$= 2\ .\ [1/(n+1)!]\ .\ [(n+1)/2e]^{n+1} = 2\ M(n+1)$

On en déduit $M(n+1) = f_n(e^{(n+1)/2)})/2$.

Comme M(n) est le maximum de $f_n(x)$, $f_n(e^{(n+1)/2)}) \leq M(n)$

On en déduit : $0 \leq M(n+1) \leq M(n)/2 \leq M(1)/2^n$

$M(1) = 1/2e$

$M(n+1) \leq \dfrac{1}{2^{n+1}e}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} M(n) = 0$

4) On considère maintenant l'intégrale

$I_n(x) = \int_1^x f_n(t)\, dt$

4a) Calculer $I_1(x)$.

$f_1(t) = \text{Ln } t / t^2$

En faisant une intégration par parties, avec $u = \text{Ln } t$, $du = dt / t$, et $dv = dt/t^2$, $v = -1 / t$

$I_1(x) = [- \text{Ln } t / t]_1^x + \int_1^x dt / t^2 = - \text{Ln } x/ x + 1 – 1/x = 1 – (1 + \text{Ln } x)/x$

4b) Montrer que $I_{n+1}(x) = I_n(x) – h_{n+1}(x)$, où $h_n(x)$ est une fonction de n et x dont on donnera l'expression.
En déduire que, $\forall n \geq 1$:

$I_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n} [(\text{Ln } x)^k /k!.x]$

Soit donc à calculer :

$I_n(x) = \int_1^x (\text{Ln } t)^n/(n!.t^2)dt$

En faisant une intégration par parties, avec $u = (\text{Ln } t)^{n+1}$ et $dv = dt/t^2$:

$$(n+1)!.I_{n+1}(x) = \int_1^x (\text{Ln } t)^{n+1}/t^2 dt = [- (\text{Ln } t)^{n+1}/t]_1^x + \int_1^x (n+1) (\text{Ln } t)^n/t^2\, dt$$

$$I_{n+1}(x) = - (\text{Ln } x)^{n+1}/(n+1)!x + I_n(x)$$

$$h_n(x) = - (\text{Ln } x)^n/n!x$$

Partant de $I_k(x) = I_{k-1}(x) – h_k(x)$, et en sommant pour k allant de 2 à n, on en déduit facilement que :

$$I_n(x) = I_1(x) – \sum_{k=2}^{n} h_k(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n} [(\text{Ln } x)^k /k!.x]$$

5) Soit $\alpha \geq 1$ un nombre réel.
Montrer que : $0 \leq I_n(\alpha) \leq (\alpha - 1) M(n)$
En déduire la limite de $I_n(\alpha)$ quand n tend vers + ∞.

D'une part, comme $f_n(x)$ est positif ou nul, $0 \leq I_n(x)$
D'autre part, par définition, il est évident que $\forall\ x \geq 1, f_n(x) \leq M(n)$.
Donc en majorant $f_n(x)$ par $M(n)$ dans l'intégrale $I_n(\alpha)$, on a $I_n(\alpha) \leq (\alpha - 1) M(n)$

On a vu à la question 3 que $\lim_{n\to+\infty} M(n) = 0$; il s'en suit que $\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = 0$.

6) Pour n entier, $n \geq 1$, et x réel $x \geq 1$, on pose :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (\text{Ln } x)^k /k!$$

Exprimer $L_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$.
Déterminer la limite de $L_n(\alpha)$ quand n tend vers + ∞, α étant un nombre réel.
En déduire la limite γ de la suite v_n dont le terme général de rang n est :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$$

D'après l'expression trouvée à la question 4, $I_n(x) = 1 - L_n(x)/x$, et donc :

$$L_n(x) = x - x\, I_n(x).$$

α étant un nombre réel, $1 \leq \alpha < +\infty$, $L_n(\alpha) = \alpha - \alpha.I_n(\alpha)$; comme $\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} L_n(\alpha) = \alpha$.
On remarque que $v_n = L_n(e)$.
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \gamma = \lim_{n\to+\infty} L_n(e) = e$.

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice 1

Question 1

Il y a C_6^3 tirages sans remise de taille 3, soit 20 échantillons possibles.

Question 2

La moyenne est égale à 1025 euros et l'écart type est égal à 38,28 euros
(variance de 1465).

Question 3

Pour obtenir un tirage stratifié représentatif des strates Homme/Femme, toujours avec n = 3, il faut prendre 2 hommes et 1 femme. Les échantillons possibles sont dans le tableau ci-dessous, ainsi que les salaires moyens obtenus sur ces échantillons.

ABE	960	ABF	980	ACE	1000	ACF	1020
ADE	1020	ADF	1040	BCE	1010	BCF	1030
BDE	1030	BDF	1050	CDE	1070	CDF	1090

Question 4

La moyenne est toujours égale à 1025 euros et l'écart type a diminué et est égal à 34,55 euros (variance de 1193,75).

Exercice 2

Question 1

Situation au 1er janvier 2004 des salariés déjà présents au 1er janvier 2000
Distributions conditionnelles

1/1/00 \ 1/1/04	Cadre	Agent de maîtrise	Agent d'exécution	Parti de l'entreprise	Total
Cadre	0,740	0,000	0,000	0,260	1,000
Agent de maîtrise	0,040	0,820	0,000	0,140	1,000
Agent d'exécution	0,000	0,025	0,825	0,150	1,000
Total	0,043	0,143	0,660	0,154	1,000

Question 2

Le niveau de classification influe sur les départs. En effet, on constate que :

- Les probabilités conditionnelles de l'événement « départ sachant que le salarié avait initialement le niveau i » diffèrent sensiblement selon le niveau.
- Les probabilités de l'événement « départ et niveau i » diffèrent, quelle que soit la catégorie i, du produit des probabilités marginales. Par exemple, on a :
  P(départ et agent d'exécution) = 0,150 alors que P(départ)xP(agent d'exécution) = 0,154x0,80 = 0,1232

Question 3

Il faut observer 423 départs. Sachant que l'on observe par période de 4 ans 154 départs, le nombre n de périodes recherché est solution de l'équation :

$$423=846(1-0,154)^n$$

On trouve n = 5 périodes, soit 20 ans.

Question 4

La répartition trouvée est la suivante

Tableau prévisionnel des effectifs sans embauche

	1/1/04	1/1/08	1/1/12
Cadre	43	38	33
Agent de maîtrise	143	133	123
Agent d'exécution	660	545	450
Total	846	716	606

Question 5

Il faut 7 cadres de plus au 1er janvier 2012 par rapport au résultat trouvé à la question précédente, donc il faut recruter $7 / (0,74)^2 = 13$ cadres au 1er janvier 2004.