

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

**ISE Option Économie**

**ORDRE GÉNÉRAL**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

**Sujet n° 1**

Un proverbe dit «*L'erreur n'annule pas la valeur de l'effort accompli*». Commentez.

**Sujet n° 2**

Qu'est-ce que l'économie verte et quels en sont les enjeux, notamment pour l'Afrique ?

**Sujet n° 3**

«*Les Etats africains doivent intégrer le droit à l'alimentation dans leur constitution en vue d'assurer la sécurité alimentaire des citoyens*». Ce point de vue a été défendu par une militante de la société civile africaine lors du Forum Social Mondial qui s'est tenu en février 2011 à Dakar. Qu'en pensez-vous ?

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

**ISE Option Économie**

**1<sup>ère</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

*L'épreuve est composée d'un exercice et deux problèmes indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.*

**Exercice**

Les symboles  $\text{Ln}$  et  $\tan$  représentent respectivement le logarithme népérien et la tangente. On donne  $\text{Ln } 2 = 0,69$ .

1) Comparer les intégrales A et B :

$$A = \int_0^{\pi/4} \text{Ln}(\cos x) dx$$

$$B = \int_0^{\pi/4} \text{Ln}(\cos(\pi/4 - x)) dx$$

2) Calculer l'intégrale  $I = \int_0^{\pi/4} \text{Ln}(1 + \tan x) dx$

**Problème 1**

Le symbole  $\text{Ln}$  représente le logarithme népérien et  $R$  désigne l'ensemble des nombres réels.

1) Soit l'application  $g : ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[ \rightarrow R$ , définie par :  $g(x) = \frac{1}{\text{Ln}x}$

Etudier très précisément les variations de  $g$  (dérivées, sens de variation, concavité, limites, asymptotes éventuelles, tableau de variation, graphe).

Pour toute la suite du problème, on admettra l'existence d'une primitive  $G$  de  $g$ , qu'on ne cherchera pas à calculer explicitement.

2) On considère l'ensemble  $D = ]0, 1/2 [ \cup ]1, +\infty [$ .

On définit l'intégrale  $J(x)$  par :

$$J(x) = \int_x^{2x} g(t) dt$$

Montrer que  $J(x)$  existe pour tout  $x \in D$ .

3) Soit l'ensemble  $D^+ = [0, 1/2 [ \cup ]1, +\infty [ = D \cup \{0\}$

On définit l'application  $f : D^+ \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\begin{aligned} \forall x \in D, f(x) &= J(x) \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

Montrer que  $f$  est dérivable sur  $D$ , et calculer sa dérivée  $f'$ .

Etudier le signe de  $f'$  et en déduire le sens des variations de  $f$ .

4) Démontrer que,  $\forall x \in D$  :

$$\frac{x}{\ln(2x)} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln x}$$

En déduire les limites de  $f(x)$  et de  $f(x)/x$  quand  $x \rightarrow 0$ .

Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0.

5) Quelles sont les limites de  $f(x)$  et de  $f(x)/x$  quand  $x \rightarrow +\infty$  ?

6) Soit l'application  $h : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par :

$$h(u) = \ln(u) - 2u + 2$$

Montrer qu'il existe un réel unique, noté  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1/2$ , tel que  $h(\alpha) = 0$ .

Montrer que  $\forall u \in [\alpha, 1]$ , on a  $\ln(u) \geq 2u - 2$ .

En déduire que  $f(x)$  est majorée, pour tout  $x \in [\alpha, 1/2]$ , par  $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)$ .

Calculer la limite de  $f$  quand  $x \rightarrow 1/2$ .

7) Montrer que,  $\forall u \geq 1$ ,  $\ln(u) \leq u - 1$ .

En déduire la limite de  $f$  quand  $x \rightarrow 1$ .

8) Construire le tableau de variations de  $f$ .

## Problème 2

Soit l'application  $f : ]-1, +1[ \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que :

$$f(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$$

1) On veut montrer que  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $]-1, +1[$  et que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , il existe un polynôme réel  $P_n$  de la variable réelle  $x$ , de degré  $n$ , tel que :

$$\forall x \in ]-1, +1[, f^{(n)}(x) = P_n(x) / (1 - x^2)^{n+1/2}$$

a) Calculer les polynômes  $P_0, P_1, P_2, P_3$ .

b) Montrer que  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $]-1, +1[$  et exprimer  $P_{n+1}$  sous la forme :

$$(R1) \quad P_{n+1}(x) = a(x) P'_n(x) + \alpha(n) b(x) P_n(x)$$

où  $a(x)$ ,  $b(x)$  et  $\alpha(n)$  sont respectivement des fonctions de  $x$  et  $n$  que l'on explicitera.

2) Montrer que,  $\forall x \in ]-1, +1[ : (1 - x^2) f'(x) - x f(x) = 0$

3) Rappel : Formule de Leibniz : on rappelle que la dérivée d'ordre  $n$  du produit de deux fonctions  $u$  et  $v$ , notée  $(uv)^{(n)}$ , est donnée par la formule suivante :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

En utilisant les résultats des questions (2) et (1), montrer que la suite de polynômes  $(P_n)$  vérifie la relation :

$$(R2) \quad P_{n+1}(x) - (2n + 1)x P_n(x) - n^2(1 - x^2) P_{n-1}(x) = 0$$

4) Etablir que,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P'_n(x) = n^2 P_{n-1}(x)$

5) En déduire que, pour tout  $n$  entier,  $n \neq 0$  et  $n \neq 1$ , on a la relation (R3) :

$$(R3) \quad n^2 P_n(x) - (2n - 1)x P'_n(x) - (1 - x^2) P''_n(x) = 0$$

6) Pour tout  $n$  entier, calculer  $P_n(0)$  et  $P_n(1)$

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

**ISE Option Économie**

**ÉCONOMIE**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

**Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.**

**Sujet n° 1**

Après avoir rappelé les principales causes de l'explosion de la dette publique aux Etats-Unis et précisé la nature des liens entre les « *déficits jumeaux* », vous analyserez l'impact de ces déficits sur la croissance de l'économie mondiale au cours des deux dernières décennies et vous discuterez l'hypothèse de Milton FRIEDMAN selon laquelle « *si les Etats-Unis ne mettent pas un terme à leurs importants déficits commerciaux, ils finiront par perdre leur influence internationale* ».

**Sujet n° 2**

En juin 2011, Nourriel ROUBINI, influent trader de Wall Street, écrivait :

*« Les plus optimistes sont d'avis que l'économie mondiale connaît seulement un moment passager de ralenti. Les entreprises et consommateurs ont réagi aux chocs de cette année en ralentissant temporairement leurs consommations, dépenses en capital et créations d'emplois. Pour autant que les chocs ne s'aggravent pas (et quand certains auront diminué en importance), la confiance et la croissance reviendront (...)*

*Cependant, il y a de bonnes raisons de penser que nous connaissons une dépression plus persistante. Premièrement, les problèmes de la périphérie de la zone euro sont dans certains cas de vrais problèmes d'insolvabilité, et non pas d'illiquidité : des dettes et déficits publics et privés élevés et en augmentation ; des systèmes financiers endommagés qui ont besoin d'être nettoyés et recapitalisés ; d'énormes pertes de compétitivité ; une absence de croissance économique et un taux de chômage en augmentation. Il n'est aujourd'hui plus possible de nier le fait que les dettes publiques et/ou privées en Grèce, en Irlande et au Portugal devront être restructurées ».*

A la lumière des événements les plus récents et des principaux apports de la théorie économique, vous discuterez la pertinence de ce commentaire en mettant notamment l'accent sur les facteurs de croissance et les interdépendances au sein de l'économie mondiale.

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

**ISE Option Économie**

**2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

*L'épreuve est composée d'un exercice et deux problèmes indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.*

**Exercice**

Le paramètre  $a$  est un réel strictement positif,  $a > 0$ .

Soit une application  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, vérifiant pour tout réel  $x$ ,  $0 \leq x \leq a$ , les deux conditions suivantes :

$$f(x) \neq -1$$

$$f(x) \cdot f(a-x) = 1$$

Calculer l'intégrale  $I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx$

**Problème 1**

**(les trois parties sont indépendantes)**

**Partie A**

Soit la suite  $(u_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , définie par :

$$u_0 > 0, u_1 > 0$$

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (u_n^2 u_{n+1})^{1/3}$$

1) Calculer le terme général de la suite  $(u_n)$ .

*Indication* : on pourra faire intervenir une autre suite  $(v_n)$ , telle que  $v_n = h(u_n)$ , où  $h$  est une fonction mathématique simple, permettant de transformer l'expression (1) en une expression  $(l')$  liant de façon linéaire  $v_n, v_{n+1}, v_{n+2}$ .

2) Déterminer la limite de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### **Partie B**

Soit la suite  $(u_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , définie par :

$$u_0 > 0, u_1 > 0$$

$$(2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2 u_n u_{n+1} / (u_n + u_{n+1})$$

1) Calculer le terme général de la suite  $u_n$ .

*Indication* : on pourra faire intervenir une autre suite  $(v_n)$ , telle que  $v_n = h(u_n)$ , où  $h$  est une fonction mathématique simple, permettant de transformer l'expression (2) en une expression  $(2')$  liant de façon linéaire  $v_n, v_{n+1}, v_{n+2}$ .

2) Déterminer la limite de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### **Partie C**

Soit la suite  $(u_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , définie par :

$$u_0 = u_1 = u_2 = 1$$

$$(3) \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = (1 + u_{n+2}u_{n+1}) / u_n$$

1) Calculer les premiers termes de  $(u_n)$ , pour  $n = 3$  à 8.

2) Montrer par récurrence que l'on peut écrire la suite  $(u_n)$  sous la forme (4) :

$$(4) \quad \forall n \geq 0, u_{n+4} = a u_{n+2} + b u_n$$

où  $a$  et  $b$  sont des entiers que l'on déterminera.

3) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}^*$ .

## Problème 2

### Partie 1

Soit  $A$  un réel non nul.

Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel non nul, on peut déterminer une suite unique de  $n+1$  nombres réels  $(t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n)$  vérifiant les trois conditions suivantes :

- (i)  $t_0 = 0, t_n = A$
- (ii)  $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$
- (iii)  $\forall k \in \{0, \dots, n-1\} \quad t_{k+1} - t_k = A/n$

### Partie 2

Soit la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue et strictement positive.

1) Montrer que, pour tout  $n$  entier non nul, il existe dans  $[0, 1]^{n+1}$  une suite unique de  $n+1$  nombres réels  $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  vérifiant les trois conditions suivantes :

- (i)  $x_0 = 0, x_n = 1$
- (ii)  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$
- (iii)  $\forall k \in \{0, \dots, n-1\} \quad \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt = \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) dt$

2) Soit  $U(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(x_k)$ .

Déterminer la limite  $L$  de  $U(n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

3) Calculer  $L$  dans le cas particulier de  $f(x) = e^x$



AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

**ISE Option Économie**

**ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE**

**(Durée de l'épreuve : 2 heures)**

***Note :** La note finale tiendra compte, de façon non négligeable, des commentaires demandés explicitement.*

**Exercice 1**

Les importations du Burkina-Faso (en milliards de francs CFA) ont suivi l'évolution suivante pendant 4 ans :

**Tableau 1 - Importations du Burkina-Faso**

| Dates t | Trimestre et année | Milliards de F CFA |
|---------|--------------------|--------------------|
| 1       | T3 2007            | 184,3              |
| 2       | T4 2007            | 197,7              |
| 3       | T1 2008            | 194,0              |
| 4       | T2 2008            | 228,5              |
| 5       | T3 2008            | 230,1              |
| 6       | T4 2008            | 250,2              |
| 7       | T1 2009            | 211,8              |
| 8       | T2 2009            | 241,4              |
| 9       | T3 2009            | 240,8              |
| 10      | T4 2009            | 283,0              |
| 11      | T1 2010            | 232,4              |
| 12      | T2 2010            | 258,9              |
| 13      | T3 2010            | 284,5              |
| 14      | T4 2010            | 291,4              |
| 15      | T1 2011            | 272,1              |
| 16      | T2 2011            | 287,6              |

Source : Site internet d'Afristat

(Lecture : T3 2007 signifie 3<sup>ème</sup> trimestre de l'année 2007)

### Question 1

- a) Représenter graphiquement l'évolution des importations. Expliquer quelle méthode de prévision peut convenir. Rappeler le principe de la méthode.
- b) Déterminer la tendance en faisant un ajustement linéaire. On vous donne les éléments suivants : si  $t$  est la variable temps et  $X$  le montant des importations en Milliards de Francs CFA, on a  $E(t) = 8,5$  ;  $E(X) = 243,0$  ;  $V(t) = 21,25$  ;  $V(X) = 1135,9$  ;  $COV(t,X) = 138,1$ .

### Question 2

- a) Représenter sur le même graphique l'évolution des importations année par année. Pour cela, porter en abscisses les 4 trimestres T1, T2, T3 et T4 et tracer 5 courbes correspondant aux évolutions des 5 années étudiées (2007 à 2011). Commenter.
- b) Pour tenir compte de la saisonnalité dans ce schéma dit « multiplicatif », les coefficients saisonniers sont estimés en calculant les moyennes des rapports entre les importations et la tendance pour une même saison. Pour vous aider, le tableau 2 ci-dessous vous fournit quelques calculs déjà établis que vous serez amenés à compléter en tant que de besoin. Commenter.

**Tableau 2 - Importations du Burkina-Faso**

| T  | Importations<br>(1) | Estimation à<br>partir du<br>modèle (2) | rapport (1)/(2) |
|----|---------------------|---|-----------------|
| 1  | 184,3               | 194,3                                   | 0,948           |
| 2  | 197,7               |   |                 |
| 3  | 194,0               | 207,3                                   | 0,936           |
| 4  | 228,5               | 213,8                                   | 1,069           |
| 5  | 230,1               | 220,3                                   | 1,044           |
| 6  | 250,2               | 226,8                                   | 1,103           |
| 7  | 211,8               | 233,3                                   | 0,908           |
| 8  | 241,4               |   |                 |
| 9  | 240,8               | 246,3                                   | 0,978           |
| 10 | 283,0               | 252,8                                   | 1,120           |
| 11 | 232,4               | 259,3                                   | 0,896           |
| 12 | 258,9               | 265,8                                   | 0,974           |
| 13 | 284,5               |   |                 |
| 14 | 291,4               | 278,8                                   | 1,045           |
| 15 | 272,1               |   |                 |
| 16 | 287,6               | 291,8                                   | 0,986           |

### Question 3

- a) Etablir des prévisions sur l'année 2012 à partir du modèle linéaire défini à la question 1b.
- b) Corriger les prévisions de la question 3a des variations saisonnières en utilisant la question 2b. Commenter.

### **Exercice 2**

Commenter les tableaux 3 donnés en annexe sur l'évolution de l'indice de la production industrielle (IPI) dans quelques pays africains, notamment sous l'angle des comparaisons entre les Etats et sous l'angle de l'utilisation de données CVS (corrigées des variations saisonnières) ou non.

**Tableaux 3**  
**Indice de la Production industrielle**  
(source : site web [www.afristat.org](http://www.afristat.org))

#### **Bénin - Base 1999 = 100**

| Années | Trimestres | Brute<br>1999=100 | CVS<br>1999=100 |
|--------|------------|-------------------|-----------------|
| 2007   | T3         | 182,9             | 183,2           |
|        | T4         | 197,1             | 186,8           |
| 2008   | T1         | 181,4             | 187,3           |
|        | T2         | 189,5             | 192,5           |
|        | T3         | 188,2             | 195,8           |
|        | T4         | 218,6             | 203,3           |
| 2009   | T1         | 203,1             | 205,7           |
|        | T2         | 206,0             | 208,2           |
|        | T3         | 204,9             | 213,5           |
|        | T4         | 217,5             | 207,0           |
| 2010   | T1         | 207,9             | 208,9           |
|        | T2         |                   |                 |
|        | T3         |                   |                 |
|        | T4         |                   |                 |
| 2011   | T1         |                   |                 |
|        | T2         |                   |                 |

**Cameroun - Base 1995/1996 = 100**

| Années | Trimestres | Brute<br>1995/1996=100 | CVS<br>1995/1996=100 |
|--------|------------|------------------------|----------------------|
| 2007   | T3         | 138,5                  | 157,5                |
|        | T4         | 141,9                  | 144,4                |
| 2008   | T1         | 168,5                  | 146,2                |
|        | T2         | 161,9                  | 158,9                |
|        | T3         | 139,7                  | 162,7                |
| 2009   | T4         | 144,3                  | 148,4                |
|        | T1         | 177,9                  | 153,5                |
|        | T2         | 170,5                  | 167,3                |
|        | T3         | 136,6                  | 160,0                |
| 2010   | T4         | 143,2                  | 147,6                |
|        | T1         | 169,8                  | 145,2                |
|        | T2         | 143,3                  | 140,0                |
|        | T3         | 127,2                  | 150,6                |
| 2011   | T4         | 147,5                  | 151,9                |
|        | T1         |                        |                      |
|        | T2         |                        |                      |

**Gabon - Base 1989 = 100**

| Années | Trimestres | Brute<br>1989=100 |  |
|--------|------------|-------------------|--|
| 2007   | T3         | 197,9             |  |
|        | T4         | 193,3             |  |
| 2008   | T1         | 190,1             |  |
|        | T2         | 204,7             |  |
|        | T3         | 204,4             |  |
| 2009   | T4         | 200,9             |  |
|        | T1         | 186,0             |  |
|        | T2         | 186,2             |  |
|        | T3         | 197,1             |  |
| 2010   | T4         | 193,8             |  |
|        | T1         | 196,0             |  |
|        | T2         | 210,0             |  |
|        | T3         | 197,2             |  |
| 2011   | T4         |                   |  |
|        | T1         |                   |  |
|        | T2         |                   |  |

**Mali - Base 2001 = 100**

| Années | Trimestres | Brute<br>2001=100 |  |
|--------|------------|-------------------|--|
| 2007   | T3         | 87,3              |  |
|        | T4         | 98,9              |  |
| 2008   | T1         | 97,8              |  |
|        | T2         | 82,9              |  |
|        | T3         | 74,7              |  |
| 2009   | T4         | 100,9             |  |
|        | T1         | 119,4             |  |
|        | T2         | 87,0              |  |
|        | T3         | 77,1              |  |
| 2010   | T4         | 96,8              |  |
|        | T1         | 108,2             |  |
|        | T2         | 76,6              |  |
|        | T3         | 70,0              |  |
| 2011   | T4         | 92,1              |  |
|        | T1         | 106,4             |  |
|        | T2         | 87,7              |  |

**Sénégal - Base 2006 = 100**

| Années | Trimestres | Brute<br>2006=100 |  |
|--------|------------|-------------------|--|
| 2007   | T3         | 106,9             |  |
|        | T4         | 108,8             |  |
| 2008   | T1         | 109,3             |  |
|        | T2         | 100,3             |  |
|        | T3         | 91,4              |  |
|        | T4         | 94,7              |  |
| 2009   | T1         | 109,6             |  |
|        | T2         | 109,3             |  |
|        | T3         | 98,2              |  |
|        | T4         | 107,8             |  |
| 2010   | T1         | 118,6             |  |
|        | T2         | 117,2             |  |
|        | T3         | 95,5              |  |
|        | T4         | 108,0             |  |
| 2011   | T1         | 123,8             |  |
|        | T2         | 126,1             |  |

**Tchad - Base 2005 = 100**

| Années | Trimestres | Brute<br>2005=100 | CVS<br>2005=100 |
|--------|------------|-------------------|-----------------|
| 2007   | T3         | 83,9              | 88,0            |
|        | T4         | 87,1              | 84,7            |
| 2008   | T1         | 82,7              | 82,2            |
|        | T2         | 83,4              | 82,8            |
|        | T3         | 77,0              | 78,2            |
|        | T4         | 80,3              | 78,6            |
| 2009   | T1         | 77,7              | 77,7            |
|        | T2         | 77,0              | 76,3            |
|        | T3         | 76,0              | 77,1            |
|        | T4         | 78,0              | 76,8            |
| 2010   | T1         | 78,0              | 77,8            |
|        | T2         |                   |                 |
|        | T3         |                   |                 |
|        | T4         |                   |                 |
| 2011   | T1         |                   |                 |
|        | T2         |                   |                 |

**Togo - Base 2002 = 100**

| Années | Trimestres | Brute<br>2002=100 |  |
|--------|------------|-------------------|--|
| 2007   | T3         | 118,2             |  |
|        | T4         | 98,7              |  |
| 2008   | T1         | 106,9             |  |
|        | T2         | 110,9             |  |
|        | T3         | 116,0             |  |
|        | T4         | 115,1             |  |
| 2009   | T1         | 115,1             |  |
|        | T2         | 106,4             |  |
|        | T3         | 123,5             |  |
|        | T4         | 124,9             |  |
| 2010   | T1         | 116,3             |  |
|        | T2         | 117,5             |  |
|        | T3         | 113,3             |  |
|        | T4         | 122,7             |  |
| 2011   | T1         |                   |  |
|        | T2         |                   |  |