AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

Dans le plan orthonormé usuel, on donne les points $A(m)$ et $B(m)$ de coordonnées :

$A(m) : ((\frac{1}{2} + m), 0)$

$B(m) : (0, (\frac{1}{2} - m))$

où m est un paramètre réel appartenant à l'intervalle $U = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

On note par $D(m)$ la droite passant par les points $A(m)$ et $B(m)$.

1) Donner une équation de $D(m)$ sous la forme :

$$a(m)\, x + b(m)\, y + c(m) = 0$$

où a, b et c sont trois fonctions de m, dérivables, que l'on explicitera.

Solution

Equation de $D(m)$:

$(y - 0) / (x - m - \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} - m) / (0 - m - \frac{1}{2})$

$D(m) : x(\frac{1}{2} - m) + y(m + \frac{1}{2}) + (m^2 - \frac{1}{4}) + 0$

$a(m) = \frac{1}{2} - m$, $b(m) = m + \frac{1}{2}$, $c(m) = m^2 - \frac{1}{4}$

2) On note par $D'(m)$ la droite d'équation : $a'(m)\, x + b'(m)\, y + c'(m) = 0$, a', b' et c' étant les dérivées respectives de a, b et c.
Montrer que les droites $D(m)$ et $D'(m)$ se coupent en un point $M(m)$ dont on déterminera les coordonnées.

Solution

Equation de $D'(m)$: $y - x + 2m = 0$

En reportant y dans l'équation de $D(m)$, on obtient les coordonnées X et Y du point d'intersection $M(m)$:

$$X = (m + \frac{1}{2})^2$$

$$Y = (\frac{1}{2} - m)^2$$

On remarque que X et Y varient entre 0 et 1.

3) Déterminer le lieu géométrique du point $M(m)$ quand m parcourt l'intervalle U. Tracer sa courbe dans le repère orthonormé usuel.

Solution

$$m + \frac{1}{2} = X^{1/2}$$

$$m = X^{1/2} - \frac{1}{2}$$

D'où : $Y = (\frac{1}{2} - X^{1/2} + \frac{1}{2})^2 = (1 - X^{1/2})^2 = X - 2\, X^{1/2} + 1$.

$Y' = 1 - X^{-1/2} = (X^{1/2} - 1) / X^{1/2}$, qui est négative puisque X est entre 0 et 1.

Quand X tend vers 0, Y tend vers 1.
Quand x tend vers 1, Y tend vers 0.

Les valeurs de Y' en 0 et 1 sont : $Y'(0) = -\infty$, et $Y'(1) = 0$

La dérivée seconde est $- X^{-3/2} / 2$, négative.

Y est donc décroissante monotone de 1 à 0 quand X varie de 0 à 1.

Problème 2

Le symbole *Ln* désigne le logarithme népérien.
On donne les valeurs numériques approchées suivantes :
$e = 2{,}718$, $e^{1/2} = 1{,}65$; $e^2 = 7{,}39$; $e^{2,1} = 8{,}17$; $e^{2,2} = 9{,}03$; $e^{2,3} = 9{,}97$; $e^{2,4} = 11{,}02$; $e^{2,5} = 12{,}18$; $Ln2 = 0{,}69$; $Ln5 = 1{,}61$.

***Partie A* :**

On considère la fonction *f*, définie sur *R*, qui, à tout *x* réel associe :

$$f(x) = e^x(x - 1) + x^2$$

1) Etudier très précisément les variations de *f* (dérivée, sens de variation, limites, asymptotes éventuelles, points marquants et tangentes en ces points). Dresser le tableau de variation.
On ne demande pas l'étude de la concavité de *f*.

Solution

$f'(x) = x(e^x + 2)$
La dérivée *a* le signe de *x*.

Lim $f(x) = +\infty$ quand x tend vers $+\infty$
Lim $f(x) = +\infty$ quand x tend vers $-\infty$
Pas d'asymptotes, branches asymptotiques.
En outre, on remarque que $f(x)/x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+- \infty$, et que :

$x \dashrightarrow +\infty$ $f(x)/x = e^x[(1 - 1/x) + xe^{-x}]$ équivalent à e^x
$x \dashrightarrow -\infty$ $f(x)/x \# x^2$

Points marquants :
$f(0) = -1$, $f'(0) = 0$

X	$-\infty$ 0	$+\infty$
f'	$-$	$+$
F	$+\infty \searrow$	$-1 \nearrow +\infty$

2) Etudier l'existence des solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Dans la suite du problème, on notera *a* la solution positive de l'équation $f(x) = 0$. Montrer que *a* appartient à l'intervalle $L = [\frac{1}{2}, 1]$. Encadrer l'autre racine *b* par un intervalle (a, b) de longueur $\frac{1}{2}$ la contenant.
Donner les équations des tangentes à la courbe représentative de *f* aux points d'abscisses *a* et *b*.

Solution

$f(x) = 0$?
Au vu des variations de f, l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines, l'une positive (a), l'autre négative notée b.
Calculs de positionnement :
Pour a :
$f(1) = 1$
$f(\frac{1}{2}) = (1 - 2e^{1/2})/4$ # – 0,57
Donc $\frac{1}{2} < a < 1$.

Pour b :
$f(-1) = (e - 2)/e$ # 0,26
$f(-1/2) = (e^{1/2} - 6)/4\, e^{1/2}$ # – 0,66
Donc $-\frac{1}{2} < b < -1$.

Equation de la tangente en $(a, 0)$:
$(y - 0)/(x - a) = f'(a) = a\,(e^a + 2)$
On pourrait remplacer e^{a} par $a^2/(1 - a)$ puisque $f(a) = 0$.
Equation de la tangente en $(b, 0)$:
$(y - 0)/(x - b) = f'(b) = b\,(e^b + 2)$

3) Calculer l'intégrale $A = \int_0^1 f\,(x)dx$

Solution

Cherchons une primitive F de f.
$F(x) = e^x(x - 1) - e^x + x^3/3 = xe^x - 2e^x + x^3/3 + C$
$A = F(1) - F(0) = (7 - 3e)/3$

4) Calculer en fonction de a l'intégrale $B = \int_a^1 f\,(x)dx$

Solution

Comme pour la question 3, $B = F(1) - F(a)$
$B = e^a(2 - a) - a^3/3 + (1 - 3e)/3$

<u>Partie B</u> :

On considère la fonction g, définie sur R^+, par :

$$g(x) = e^x / (e^x + x)$$

1) Etudier précisément les variations de g (dérivée, sens de variation, limites, asymptotes éventuelles, points marquants et tangentes en ces points). Dresser le tableau de variation. Indiquer les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

<u>Solution</u>

$g'(x) = e^x(x - 1)/(e^x + x)^2$, $x > 0$

g' est donc négative quand $x < 1$, positive pour $x > 1$, et nulle quand $x = 1$.

Lim $g(x) = 1$ quand x tend vers $+ \infty$
Lim $g(x) = 1$ quand x tend vers 0
Asymptote horizontale $y = 1$

$g(1) = e/(1 + e) = 0{,}73$

g décroit donc sur $[0, 1[$, allant de 1 à 0,73, passe par un minimum égal à 0,73 quand $x = 1$, puis croît jusqu'à 1 sur $]1, + \infty[$.

Pente en (0, 1) :
$(g(x) - 1) / x = - 1 / (e^x + x)$ --> - 1 quand x --> 0

Tangente en (0, 1) : $y = 1 - x$

2) On veut étudier la concavité de g.
Calculer la dérivée seconde g'' de g.
Montrer que g'' peut être mise sous la forme :

$$g''(x) = e^x (x + e^x)^{-3}\, U(x)$$

où $U(x)$ est une fonction de x que l'on explicitera.
Montrer que U ne peut s'annuler que pour $x > 2$.
Donner un intervalle pour l'abscisse du point d'inflexion.

<u>Solution</u>

$g''(x) = e^x (x + e^x)^{-3} [(x - 1)^2 + 1 + e^x(2 - x)]$
$U(x) = (x - 1)^2 + 1 + e^x(2 - x)$

a) Si $2 - x > 0$, *i.e.* $x < 2$, $U(x)$ est une somme de terme positifs
b) $x = 2$, $U(2) = 2 > 0$
c) $U(x)$ ne peut s'annuler que si $x > 2$

Cherchons à encadrer la racine r de U, c'est-à-dire l'abscisse du point d'inflexion :

$g''(2) = 2e^2/(2 + e^2)^3$ # 0,018
$g''(2{,}5) = 3{,}25 - 0{,}5e^{2,5}$ # - 2,84
D'où r compris entre 2 et 2,5.

Affinons cet encadrement :

$U''(2{,}4) = 2{,}96 - 0{,}4e^{2,4}$ # - 1,45
$U''(2{,}3) = 2{,}69 - 0{,}3e^{2,3}$ # - 0,30
$U''(2{,}2) = 2{,}44 - 0{,}2e^{2,2}$ # + 0,63

Plus précisément, r est entre 2,2 et 2,3.

3) Tracer la courbe G représentative de g.

<u>Solution</u>

Décroissante et convexe entre 0 et 1, minimum en 1 égal à 0,73, croît pour $x > 1$ et convexe entre 1 et r, concave ensuite.

4) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique ?
Quelle est cette racine ?

<u>Solution</u>

$g(x) = x \iff e^x / (e^x + x) = x \iff e^x(x - 1) + x^2 = 0 \iff f(x) = 0$

D'après la partie A, il existe sur R^+ une solution unique a, comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, telle que $g(a) = a$.

5) Montrer que pour tout $x \in L$, $g(x) \in L$.

<u>Solution</u>

$g(1) = 0{,}73$ (cf question 1, Partie B).
$g(\frac{1}{2}) = e^{1/2} / (0{,}5 + e^{1/2})$ # 0,77

Comme g est décroissante monotone entre 0 et 1, pour tout x entre $\frac{1}{2}$ et 1, $g(x)$ est entre 0,73 et 0,77, et donc a fortiori entre 0 et 1.
Donc pour tout $x \in L$, $g(x) \in L$.

6) Montrer que pour tout $x \in L$, $|g'(x)| \leq M$, où M est un majorant inférieur ou égal à ½ que l'on déterminera.

Solution

Calculons | $g'(\frac{1}{2})$ | = 0,5 $e^{1/2}$ / (0,5 + $e^{1/2}$)² # 0,18

Comme |g'(1)| = 1, | g' | décroit de façon monotone sur [0, 1] entre 1 et 0.
Donc sur L, | g' | décroit de façon monotone de 0,18 à 0.

Prenons $M = \frac{1}{5}$.

Remarque : on aurait bien sûr pu majorer | g' | par 0,18 sur L.

Partie C **:**

On définit la suite $u(n)$, n entier naturel non nul, par :

$u(1) = \frac{1}{2}$

$u(n) = g(u(n\text{-}1))$, pour tout $n > 1$

1) Montrer que, pour tout $n \in N^*$, u(n) $\in L$.

Solution

Par récurrence :

a) $u(1) \in L$ donc $g(u(1)) = u(2) \in L$, d'après la question 5, partie B.
b) Supposons $u(n) \in L$; pour la même raison, $g(u(n)) = u(n+1) \in L$.

2) Démontrer que, pour tout $n > 1$:

$$|u(n) - a| \leq M.|u(n-1) - a|$$

Solution

Théorème des accroissements finis :
$|g(u(n-1) - g(a)| = |u(n-1) - a|.|g'(c)|$, c entre $u(n\text{-}1)$ et a.

Or, par définition de la suite, $|g(u(n-1) - g(a)| = |u(n) - a|$, car $g(a) = a$ (question 4, Partie B).

Comme $u(n\text{-}1)$ et a sont dans L, $|g'(c)|$ est majoré par $M = \frac{1}{5}$.

D'où le résultat de majoration recherché : $|u(n) - a| \leq M.|u(n-1) - a|$

3) En déduire que $u(n)$ converge vers a.

Solution

On en déduit, par itération :
$|u(n) - a| \leq M^{n-1}.|u(1) - a|$

Et $|u(1) - a| < \frac{1}{2}$ (ce qui est certain car $u(1) = g(\frac{1}{2}) = 0{,}77$ et $a \in L$).

D'où :

$|u(n) - a| \leq \frac{M^{n-1}}{2} = 0{,}5\ (0{,}2)^{n-1}$

Il s'en suit que quand n tend vers l'infini, $|u(n) - a|$ tend vers 0.

4) Combien de termes de la suite faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de a à 10^{-7} près ?

Solution

Ecrivons $0{,}5\ (0{,}2)^{n-1} = 10^{-7}$
$Ln0{,}5 + (n-1)Ln(0{,}2) = -7\ Ln10$
D'où n est le premier entier supérieur à $(6Ln2 + 8Ln5)/Ln5$ # 10,6, soit $n = 11$.

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

Les questions 2, 3, 4 et 5 sont indépendantes.

Soit P un polynôme de degré 3, sur le corps des complexes C :
$P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$.
On note z_1, z_2, z_3 les racines de P.
Soit les expressions :
$S(1) = z_1 + z_2 + z_3$
$S(2) = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$
$S(3) = z_1z_2z_3$

1) Exprimer $S(1)$, $S(2)$ et $S(3)$ en fonction de a, b et c.

Solution
En développant, on obtient $P(z) = z^3 - z^2 (z_1 + z_2 + z_3) + z (z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3) + z_1z_2z_3$
$P(z) = z^3 - z^2 S(1) + z\ S(2) + S(3)$

En identifiant :
$S(1) = - a$
$S(2) = b$
$S(3) = - c$

2) Soit l'équation $P(z) = z^3 + 5z^2 - 8z + m = 0$.
On suppose que deux des racines de l'équation vérifient $z_1 + z_2 = - 1$.
Résoudre l'équation.

Solution
On a donc :
$S(1) = z_1 + z_2 + z_3 = - 5$
$S(2) = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = - 8$
$S(3) = z_1z_2z_3 = - m$
$z_1 + z_2 = - 1$

$z_1 + z_2 + z_3 = - 5 \Rightarrow z_3 = - 4$
D'où, d'après $S(2)$:
$z_1z_2 - 4 (z_1 + z_2) = - 8$
$4z_1z_2 = m$

$z_1z_2 = -12$
$z_1z_2 = m/4$

$\Rightarrow m = -48$

$z_1 + z_2 = -1$
$z_1z_2 = -12$

$z_1(1 + z_1) = 12$

L'équation $z_1^2 + z_1 - 12 = 0$ conduit à deux valeurs de z_1 :

a) $z_1 = -4$ d'où $z_2 = 3$

b) $z_1 = 3$ d'où $z_2 = -4$

Solutions : $(-4, 3, -4)$ et $(3, -4, -4)$

3) Soit l'équation $P(z) = z^3 + pz + q = 0$.
Pour quelles valeurs de p cette équation admet-elle trois racines réelles dont deux de différence 1 ?
Résoudre l'équation.

Solution

$S(1) = z_1 + z_2 + z_3 = 0$
$S(2) = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = p$
$S(3) = z_1z_2z_3 = -q$
Et on a, par exemple : $z_1 - z_2 = 1$

On reporte $z_1 = 1 + z_2$

$1 + 2z_2 + z_3 = 0$
$(1 + z_2)(z_2 + z_3) + z_2z_3 = p$
$(1 + z_2)z_2z_3 = -q$

$z_3 = -1 - 2z_2$, que l'on reporte dans la deuxième équation :

$(1 + z_2)(z_2 + -1 - 2z_2) + z_2(-1 - 2z_2) = p$

$(1 + z_2)(1 + z_2) + z_2(1 + 2z_2) = -p$

z_2 est racine de l'équation :

$3\ z_2^2 + 3z_2 + 1 + p = 0$

Le discriminant est $D = -3(1 + 4p)$, et l'équation en z_2 aura deux racines réelles si et seulement si $D \geq 0$, soit $p \leq -1/4$.
Notons par d la racine positive de D.

Donc deux valeurs pour z_2 : $(-3 + d)/6$ et $(-3 + d)/6$, et deux triplets solutions :

$z_2 = (-3 + d)/6 \Rightarrow z_1 = (3 + d)/6$ et $z_3 = -d/3$

$z_2 = (-3 - d)/6 \Rightarrow z_1 = (3 - d)/6$ et $z_3 = d/3$

Remarque : si $D = 0$, *i.e.* $p = -1/4$, les deux triplets sont identiques $(1/2, -1/2, 0)$.

4) Soit l'équation $P(z) = z^3 - 7z + m = 0$.
On suppose que deux des solutions de cette équation vérifient la relation $z_2 = 2z_1$.
Résoudre l'équation.

Solution

$S(1) = z_1 + z_2 + z_3 = 0$
$S(2) = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = -7$
$S(3) = z_1z_2z_3 = -m$
$z_2 = 2z_1$

En remplaçant z_2 par $2z_1$, on obtient le système équivalent :

$3z_1 + z_3 = 0$
$2z_1^2z_3 = -m$
$2z_1(z_1 + z_3) + z_1z_3 = -7$

$2z_1^2 + 3z_1z_3 = -7$

$2z_1^2 + 3z_1(-3z_1) = -7 \Rightarrow z_1^2 = 1$ et deux valeurs possibles pour z_1 : 1 et – 1

$z_1 = -1 \Rightarrow z_3 = -m/2$ et $z_2 = -2$

$z_1 = 1 \Rightarrow z_3 = -m/2$ et $z_2 = 2$

Solutions : $(-1, -2, -m/2)$ et $(1, 2, -m/2)$

5) Soit l'équation $P(z) = z^3 + pz + q = 0$.
Calculer, en fonction de p et q, la somme $E = (1/z_1)^2 + (1/z_2)^2 + (1/z_3)^2$

Solution

En réduisant au même dénominateur, on montre aisément que :
$E = [S(2)^2 - 2\,S(1)\,S(3)] / S(3)^2$
Or, compte tenu de la forme de P, $S(1) = 0$, $S(2) = p$ et $S(3) = -q$

On en déduit : $E = p^2/q^2$

Problème 2

Données : $Ln2 = 0{,}693$; $Ln1000 = 6{,}908$, Ln signifiant logarithme népérien.

On considère une urne de 11 boules, de même taille et de même texture. Le seul élément qui les différencie est la couleur. Il y a 6 boules bleues, 3 boules rouges, et deux boules vertes.

1) On tire au hasard, en même temps, trois boules dans l'urne en fermant les yeux.

1a - Soient les deux événements suivants :

A = {les 3 boules sont toutes de couleurs différentes}

B = {les 3 boules sont de la même couleur}

Calculer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$ des deux événements A et B.

$P(A) = 12/55 = 0{,}218$
$P(B) = 7/55 = 0{,}127$

1b – *A* tout tirage de 3 boules on associe X, nombre de boules bleues tirées.
Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
Calculer les probabilités $P(X = x)$, x parcourant l'ensemble des valeurs possibles pour X.
Calculer l'espérance mathématique de X.

X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3.
$P(X = 0) = 2/33 = 0{,}061$
$P(X = 1) = 4/11 = 0{,}364$
$P(X = 2) = 5/11 = 0{,}454$
$P(X = 3) = 4/33 = 0{,}121$

$E(X) = (2x0 + 12x1 + 15x2 + 4x3)/33 = 54/33 = 1{,}636$

2) Au lieu de tirer en même temps les boules, on modifie la procédure et on procède de la façon suivante : dans l'urne, on tire au hasard, toujours sans regarder les couleurs, une première boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne, puis on en tire une deuxième, selon le même processus, etc …
On effectue k tirages successifs indépendants, k étant un nombre entier supérieur ou égal à 2.

On définit les deux événements suivants :

$C = \{$toutes les boules tirées sont bleues$\}$
$D = \{$toutes le boules tirées sont rouges$\}$

Quelle est la plus petite valeur de k telle que $P(C) \geq 1000\ P(D)$?

La probabilité de tirer une boule bleue est 6/11 ; celle de tirer une boule rouge est 3/11.
$P(C) = (6/11)^k$, et $P(D) = (3/11)^k$.
$P(C) \geq 1000\ P(D)$ devient $(6/11)^k \geq 1000\ (3/11)^k$, soit $6^k \geq 1000\ 3^k$.
En passant au Logarithme népérien :
$k\ Ln6 \geq k\ Ln3 + Ln1000$
$k\ \mathrm{Ln}3 + k\ Ln2 \geq k\ Ln3 + Ln1000$
$k.Ln2 \geq Ln1000$
$k \geq (Ln1000)/Ln2 = 6{,}908/0{,}693 = 9{,}97$
$k = 10$

Problème 3

1) Trouver tous les couples d'entiers naturels non nuls x, y, avec $x \leq y$, dont la somme est un multiple du produit.

<u>Solution</u>

Soit $x + y = kxy$, où k est un entier > 0.
Comme $x \leq$ y, $kxy \leq 2y$, et comme x et y sont non nuls : $kx \leq 2$, *ie* $x \leq 2 / k$
Comme x est entier, les seules valeurs de k possibles sont $k = 1$ ou $k = 2$.
Soit donc $x = 1$ ($k = 2$) et $x = 2$ ($k = 1$)
Pour $x = 1$, $1 + y = 2\ y$ soit $y = 1$
Pour $x = 2$ ($k = 1$), $2 + y = 2y$ soit $y = 2$
Couples : (1, 1) et (2, 2)

2) Trouver tous les triplets d'entiers naturels non nuls x, y, z, avec $x \leq y \leq z$, tels que :

$$xyz = 4(x + y + z)$$

Solution

$xyz = 4(x + y + z) \Longrightarrow xyz \leq 12z$
Puisque z est non nul : $xy \leq 12$.
Soit donc à trouver deux entiers x et y, $x \leq y$, tels que $xy \leq 12$.

Il y a 19 couples candidats qui sont :
(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (1, 10), (1, 11), (1, 12),
(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 3), (3, 4)

$xyz = 4(x + y + z) \Longrightarrow z = 4(x + y) / (xy - 4)$

Le tableau suivant donne les valeurs de z associées aux couples candidats :

x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z	-8/3	-6	-16	∞	24	14	32/3	9	8	22/3
x	1	1	2	2	2	2	2	3	3	
y	11	12	2	3	4	5	6	3	4	
z	48/7	13/2	∞	10	6	14/3	4	24/5	7/2	

Comme z doit être entier et supérieur ou égal à x et y, il n'y a que 5 triplets solutions qui sont :

(1, 5, 24), (1, 6, 14), (1, 8, 9), (2, 3, 10), (2, 4, 6).

Problème 4

Soit n un nombre positif donné.
On considère une suite $S = \{u_0, u_1, \ldots, u_{2n+1}\}$ constituée de $2n+2$ entiers naturels consécutifs classés dans l'ordre croissant : $u_0 < u_1 < \ldots < u_{2n+1}$.

Indication :

a étant un nombre entier, la suite $\{a - n, a - n + 1, \ldots, a, a + 1, a + 2, \ldots a + n\}$ est une suite de $2n+1$ entiers consécutifs positifs et croissants.

1) Préliminaires :

1a) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = n^2(n+1)^2/4$

Solution

C'est une formule bien connue, qui se démontre par récurrence sans aucune difficulté

1b) Etudier la fonction f définie sur R par :

$$f(x) = (x-n)^3 + (x-n+1)^3 + \ldots + x^3 - (x+1)^3 - (x+2)^3 - \ldots - (x+n)^3$$

où n est un entier naturel non nul.

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique notée a où a vérifie :

$$3n(n+1) < a < 1 + 3n(n+1)$$

Solution

Transformons f.

$f(x) = x^3 + S_{k=1 à n}\,[(x-k)^3 - (x+k)^3]$
$= x^3 - 6x^2\, S_{k=1 à n}\, k - 2\, S_{k=1 à n}\, k^3$
$= x^3 - 3x^2 n(n+1) - n^2(n+1)^2/2$

$f'(x) = 3x^2 - 6xn(n+1) = 3x\,(x - 2n(n+1))$ s'annule en 0 et $2n(n+1)$.

Sur R, f est donc croissante sur $]-\infty, 0[$ allant de $-\infty$ à $-n^2(n+1)^2/2$, puis décroit sur $]0,2n(n+1)[$ de $-n^2(n+1)^2/2$ à $n^2(n+1)^2[8n(n+1) - 25/2]$, terme négatif même si $n=1$, et croît à nouveau sur $]2n(n+1), +\infty[$ de $n^2(n+1)^2[8n(n+1) - 25/2]$ à l'infini.

Il existe donc une et une seule solution α à l'équation $f(x) = 0$, $\alpha > 2n(n+1)$.

Calculons $f(3n(n+1))$:

$f(3n(n+1)) = -n^2(n+1)^2/2$, terme < 0.

De même :

$f(1 + 3n(n+1)) = (1 + 3n(n+1))^3 - 3(1 + 3n(n+1))^2\, n(n+1) - n^2(n+1)^2/2$

En développant :

$f(1 + 3n(n+1)) = 1 + 27\, n^{3(n+1)}3 + 9n(n+1) + 27\, n^2(n+1)^2 - 3[1 + 9\, n^2(n+1)^2 + 6n(n+1)]n(n+1) - n^2(n+1)^2/2$
$= 1 + 6n(n+1) + 17\, n^2(n+1)^2/2$, terme > 0

D'où l'encadrement recherché pour α .

2) Existe-t-il une suite S vérifiant la relation A ?

$$(A) \qquad u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n = u_{n+1} + \ldots + u_{2n+1}$$

Solution

Utilisons la suite donnée dans l'indication :

$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n - (u_{n+1} + \ldots + u_{2n+1})$
$= x + S_{k=1 à n}\,[(x-k) - (x+k)]$
$= x - 2S_{k=1 à n}\, k = x - n(n+1) = 0$

Donc si on prend $a = n(n+1)$, on a une solution pour (A).

3) Existe-t-il une suite S vérifiant la relation B ?

$$(B) \quad (u_0)^2 + (u_1)^2 + \ldots. + (u_{n-1})^2 + (u_n)^2 = (u_{n+1})^2 + \ldots. + (u_{2n+1})^2$$

Solution

Comme pour la question 2 :
$(u_0)^2 + (u_1)^2 + \ldots. + (u_{n-1})^2 + (u_n)^2 - [(u_{n+1})^2 + \ldots. + (u_{2n+1})^2]$
$= x^2 + S_{k=1 à n} [(x - k)^2 - (x + k)^2]$
$= x^2 - 4x S_{k=1 à n}\, k$
$= x^2 - 2xn(n+1) = x(x - 2n(n+1)) = 0$

$x = 0$ est impossible (cela conduirait à des termes négatifs), donc $x = 2n(n+1)$.
Si on prend $a = 2n(n+1)$, on obtient une solution pour (B).

4) Existe-t-il une suite S vérifiant la relation C ?

$$(C) \quad (u_0)^3 + (u_1)^3 + \ldots. + (u_{n-1})^3 + (u_n)^3 = (u_{n+1})^3 + \ldots. + (u_{2n+1})^3$$

Solution

Comme précédemment, et d'après la question 1b :
$(u_0)^3 + (u_1)^3 + \ldots. + (u_{n-1})^3 + (u_n)^3 - [(u_{n+1})^3 + \ldots. + (u_{2n+1})^3]$
$= x^3 + S_{k=1 à n} [(x - k)^3 - (x + k)^3]$
$= x^3 - 3x^2 n(n+1) - n^2(n+1)^2/2 = 0$

D'après la question 1b, cette équation admet une solution comprise strictement entre les deux entiers consécutifs $3n(n+1)$ et $1 + 3n(n+1)$.

Contrairement aux questions 2 et 3, il est donc impossible de trouver un nombre a entier naturel permettant de construire une suite de S solution de (C).

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1

Pour calculer le taux de pauvreté H, il nous faut le nombre de personnes en situation de pauvreté multidimentionnelle (noté q) et le nombre de personnes total (noté n). Dans le tableau 1, on a 4 ménages dont 3 sont des ménages pauvres (cf. la dernière ligne du tableau). En conséquence n = (4+7+5+4) =20 et q = (7+5+4) = 16. H est donc égal à 0,8

Pour calculer la sévérité de la pauvreté A, on utilise la formule donnée dans l'énoncé et les résultats intermédiaires données en avant dernière ligne du tableau (niveau de privation du ménage, noté k) :

A = (7 x 0,722 + 5 x 0,389 + 4 x 0,500) / 16 = 0,562
IPM = A x H = 0,450

Question 2

Le coefficient de détermination, noté r^2 est le rapport de la covariance au carré divisé par le produit des variances : r^2 = Covariance (PIB/hab ; IPM) x Covariance (PIB/hab ; IPM) / Variance (PIB/hab) x Variance (IPM)

Donc $r^2 = 0,631$

Ce coefficient n'est pas proche de 1, ce qui signifie qu'il n'y a pas une forte corrélation entre les deux variables observées (IPM et PIB/hab).

Question 3

Pas de corrigé type.