AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. Calculer, en $x=1$, la dérivée de : $x^2\, Arc\tan(x)$ Soit $f(x) = x^2\, Arc\tan(x)$, alors $f'(x) = 2x\, Arc\tan(x) + \dfrac{x^2}{1+x^2}$ et $f'(1) = 2\times\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi+1}{2}$

2. Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{Log(x)}{x}\,dx$, où Log désigne le logarithme décimal.

$I = \left[1/2\,(Log\ x)^2\right]_1^2 = \dfrac{(Log 2)^2}{2}$

3. Résoudre l'équation : $x^3-6x^2+11x-6=0$

On vérifie que $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)=0$, d'où x=1, 2, 3.

4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{t+1}{t+2}\,dt$

On a : $\dfrac{t+1}{t+2} = 1-\dfrac{1}{t+2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{t+1}{t+2}\,dt = \lim_{+\infty}(x-Ln(x+2)-1+Ln3) = +\infty$

5. Résoudre l'inéquation $\dfrac{x^2-2}{x-1}\le 0$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{x^2-2}{x-1}\le 0$ est $\left]-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left]1,\sqrt{2}\right]$

6. Donner l'équation de la droite dans le plan, qui passe par le point $A(1,-1)$ et parallèle au vecteur $u(1,2)$. L'équation de la droite est $y=2x-3$

7. Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} Ln\,x + Ln\,y = 2 \\ x + y = \dfrac{5}{2}e \end{cases}$$

On a : $\begin{cases} x \times y = e^2 \\ x + y = \dfrac{5}{2}e \end{cases}$, d'où $y = \dfrac{e^2}{x}$ et $2x^2 - 5ex + 2e^2 = 0$. L'ensemble des solutions est : $(x, y) = (2e, e/2)$ *ou* $(e/2, 2e)$

8. Déterminer la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)_{n \in N}$ définie par : $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}u_n$ et $u_0 > 0$

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}u_n = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n}{n+1}u_{n-1} = ... = \frac{2}{n+2}u_0 \to 0$$

9. Une course à pied en relais (3 équipiers) se déroule entre les communes de Rockville et Fieldvillle, distantes de 38 kms.
Le premier coureur doit parcourir 10 kms et sa vitesse est de 14 kms/heure,
le deuxième coureur doit parcourir 13 kms et sa vitesse est de 17 kms/heure, et
le troisième coureur doit parcourir 15 kms et sa vitesse est de 16 kms/heure.
Quel sera le temps réalisé par ce relais ?

Le premier coureur parcourt 1 km en $\dfrac{60}{14} = 4{,}2857mn$

Le deuxième coureur parcourt 1 km en $\dfrac{60}{17} = 3{,}5294mn$

Le troisième coureur parcourt 1 km en $\dfrac{60}{16} = 3{,}75mn$

Au total, le temps est : $10 \times 4{,}2857 + 13 \times 3{,}2594 + 15 \times 3{,}75 = 144mn,$ soit $2h24$

10. Déterminer $\underset{x \to 0+}{Lim} \dfrac{x - \sin(x)}{x^3}$

$$\underset{x \to 0+}{Lim} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \underset{x \to 0+}{Lim} \frac{x - (x - x^3/6)}{x^3} = 1/6$$

Exercice n° 2

On considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$ et $u_0 = 1$

1. On vérifie par récurrence que la suite (u_n) est à termes strictement positifs.

2. Si la suite (u_n) converge, sa limite l vérifie le théorème du point fixe, $l = \dfrac{l+2}{l+1}$ et on trouve $l = \sqrt{2}$

3. La fonction f est une fonction homographique décroissante qui admet les droites $x=-1$ et $y=1$ comme asymptotes.

4. L'aire comprise entre l'axe *ox*, le graphe de f et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$ est égale à :

$$\int_1^2 \frac{x+2}{x+1}dx = \int_1^2 (1+\frac{1}{x+1})dx = [x+Ln(x+1)]_1^2 = 1+Ln(3/2)$$

5. Comme la fonction f est décroissante, la suite (u_n) n'est pas monotone, mais les suites extraites de rang pair et impair sont monotones. La suite (u_{2n+1}) est croissante et majorée par $\sqrt{2}$ (on le vérifie par récurrence à partir de u_1) et la suite (u_{2n}) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. Ces deux suites sont adjacentes et (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{1+x^2}$$

1. Etudier les variations de *f*.

La dérivée de *f* est : $f^{'}(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ et elle s'annule pour $x=\pm 1$

La fonction est décroissante de moins l'infini à -1 et à valeurs dans l'intervalle $[1/2, 1[$
elle est croissante de -1 à 1 et à valeurs dans l'intervalle ½, 3/2, et
elle est décroissante de 1 à plus l'infini et à valeurs dans l'intervalle 3/2, 1.

2. Tracer le graphe de *f*.

3. Préciser les points d'inflexion de son graphe. Les points d'inflexion correspondent aux valeurs qui annulent la dérivée seconde. Le numérateur de la dérivée seconde est égal à :

$$-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)4x(1+x^2) = 2x(x^2-3)$$

On obtient donc 3 points d'inflexion, à savoir $(0,1); (\sqrt{3}, 1+\frac{\sqrt{3}}{4}); (-\sqrt{3}, 1-\frac{\sqrt{3}}{4})$

4. Calculer $I = \int_{-1}^{1} (f(x)-1)\,dx$

Comme *f*(*x*)-1 est impaire, *I*=0.

Exercice n° 4

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par:

$$f(x) = 2x - \frac{Ln(x)}{x^2}$$

On note C la courbe représentative de la fonction *f* dans le plan, muni d'un repère orthogonal et *Ln* désigne le logarithme népérien.

1. Déterminer les limites de la fonction *f* en 0 et en $+\infty$.

$$\lim_{x \to 0+} (2x - \frac{Ln(x)}{x^2}) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} (2x - \frac{Ln(x)}{x^2}) = +\infty$$

2. Démontrer que la courbe C admet une asymptote oblique D, et étudier la position relative de la courbe C et de la droite D.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad et \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = 0$

La courbe admet donc une asymptote oblique D d'équation : *y=2x*.

3. Etudier les variations de la fonction *f*.

La dérivée de *f* est égale à $f'(x) = \frac{2x^3 - 1 + 2Ln(x)}{x^3}$ et elle est du signe de $g(x) = 2x^3 - 1 + 2Ln(x)$, qui a pour dérivée : $g'(x) = 6x^2 + 2/x > 0$. La fonction *g* est donc strictement croissante à valeurs dans *R* et comme elle est continue, elle est bijective. Il existe donc une unique valeur α qui annule *g*, et *f* est décroissante entre 0 et α, puis croissante.

4. Tracer la courbe C.

La courbe C admet D comme asymptote oblique, l'axe Oy comme asymptote verticale et un minimum en α.

5. Calculer $I_n = 2\int_1^n \frac{Ln(x)}{x^2} dx$

Par intégration par parties, en posant $u = Ln(x) \quad et \quad v' = 1/x^2$, on obtient :

$$I_n = 2\left[1 - \frac{Ln\, n}{n} - \frac{1}{n}\right]$$

6. Que représente I_n ?

Elle représente l'aire comprise entre la courbe C, l'asymptote D et les droites verticales x=1 et x=n.

7. Calculer la limite de I_n. On obtient 2 comme limite.

Exercice n° 5

On dispose de deux « dés ».
Le premier dé A est un cube composé de 6 faces identiques, dont trois faces portent le chiffre 1, deux faces portent le chiffre 2 et une face porte le chiffre 3.
Le deuxième dé B est un parallélépipède de largeur 2 cm, de longueur 3 cm et de hauteur 4 cm. Les deux plus petites faces (superficie la plus petite) portent le chiffre 1, les deux faces moyennes le chiffre 2 et les deux plus grandes faces le chiffre 3. On jette les deux dés (qui forcément tombent sur une face) et on suppose que la probabilité de tomber sur une face est proportionnelle à sa surface.
Soit X la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus par les deux dés.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
Pour le premier dé A, la probabilité de faire 1 est égale à 3/6, de faire 2 égale à 2/6, puis 1/6 pour le 3.
Le total des surfaces des faces différentes du deuxième dé B est égal à 26 cm2.
Pour les deux plus petites surfaces (2*3) qui portent la chiffre 1, la probabilité est donc égale à 6/26=3/13.
Pour les deux surfaces moyennes (2*4) qui portent la chiffre 2, la probabilité est donc égale à 8/26=4/13.
Pour les deux plus grandes surfaces (4*3) qui portent la chiffre 3, la probabilité est donc égale à 12/26=6/13.
La loi de probabilité de X est donc :

X	2	3	4	5	6
Probabilité	9/78	18/78	29/78	16/78	6/78

2. Quelle est la probabilité que X>4 ? 22/78=11/39=0,28…

3. Ce jeu vous semble-t-il réaliste ?
L'hypothèse selon laquelle la probabilité que le « dé » parallélépipédique tombe sur une certaine face est proportionnelle à sa surface n'est pas réaliste. En effet, le dé a vraiment une probabilité presque nulle de tomber sur la plus petite face, du fait du positionnement du centre de gravité et de l'angle d'incidence.

Exercice n° 6

On considère la suite de polynômes réels P_n définie par : $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1$, pour $n \geq 2$.

1. Calculer $P_n(0)$ et $P_n(1)$

$P_n(0) = -1$ et $P_n(1) = n - 1$

2. Montrer que P_n admet une unique racine α_n comprise entre 0 et 1 (on précisera la valeur exacte de α_2)

$$P_n^{'}(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \text{ et } P_n^{'} > 0 \text{ sur } R^+$$

Cette suite de polynômes est strictement croissante et continue sur l'ensemble des réels positifs et on a : $P_n(0) \times P_n(1) < 0$

Il existe donc une unique racine α_n pour P_n dans l'intervalle $]0,1[$

3. Démontrer que, pour $n \geq 2$: $P_n(\alpha_{n+1}) < 0$

$$P_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{n+1}^k - 1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n+1}^k + \alpha_{n+1}^{n+1} - 1 = P_n(\alpha_{n+1}) + \alpha_{n+1}^{n+1} = 0, \text{ d'où } P_n(\alpha_{n+1}) < 0$$

4. Etudier la convergence de la suite (α_n)

De plus $P_n(\alpha_n) = 0$ et l'inégalité ci-dessus s'écrit : $P_n(\alpha_{n+1}) < P_n(\alpha_n)$, ce qui prouve que la suite (α_n) est décroissante et comme elle est minorée par zéro, elle converge.

5. Démontrer que pour tout $x \neq 1$, on a : $P_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$ et en déduire que α_n est solution d'une équation de degré n+1.

Comme on a une suite géométrique, on obtient $P_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$

Et comme $P_n(\alpha_n) = 0$, on a : $\alpha_n^{n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0$

6. Comparer $2\alpha_n - 1$ et α_2^{n+1}

La suite (α_n) étant décroissante, on a, pour *n* plus grand que deux : $\alpha_n < \alpha_2 < 1$

Par stricte croissance de la fonction puissance, il vient : $\alpha_n^{n+1} < \alpha_2^{n+1}$

Et d'après la question précédente, on obtient : $0 < 2\alpha_n - 1 < \alpha_2^{n+1}$

7. En déduire la valeur de la limite de la suite (α_n)

Comme $\alpha_2 \in]0,1[$, la suite (α_n) converge vers ½ (car α_n^{n+1} tend vers zéro).

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

On considère la fonction numérique *f* d'une variable réelle définie par : $f(x) = (x^2+1)e^x$

1. Etudier les variations de *f* et sa convexité.
   On a : $f'(x) = (x^2+1+2x)e^x = (x+1)^2 e^x$
   La fonction est donc strictement croissante à valeurs dans $[0,+\infty[$ et elle admet une branche parabolique dans la direction Oy en $+\infty$
   La dérivée seconde est égale à : $f''(x) = (x+1)(x+3)e^x$ et la fonction *f* est concave entre -3 et -1 et convexe sinon.

2. Tracer le graphe de *f*.
   La fonction est strictement croissante. On a une tangente horizontale au point (-1, 2/e) et l'axe Ox est une asymptote horizontale à $-\infty$

3. Calculer : $I = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

   $$I = \int_{-1}^{0} (x^2+1)e^x\,dx = \left[(x^2+1)e^x\right]_{-1}^{0} - 2\int_{-1}^{0} x e^x\,dx = (1-2/e) - 2\left[x e^x\right]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0} e^x\,dx$$

   Et $I = (1-2/e) - 2(-1+2/e) = 3 - 6/e$

4. Pour quelle valeur du paramètre α a-t-on $\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx = 2e-3$?

   Une primitive de *f* est $F(x) = (x^2+1)e^x - 2(xe^x - e^x) = (x^2-2x+3)e^x$
   Il faut donc $F(\alpha) - F(0) = F(\alpha) - 3 = 2e-3$, soit $\alpha = 1$

5. On considère la fonction numérique *g* d'une variable réelle définie par : $g(x) = (x^2+1)^k e^x$ où k est un nombre réel strictement supérieur à 1. Etudier ses variations.
   Remarquons que la fonction *f* correspond à la fonction *g* pour *k*=1. On a :
   Cette dérivée s'annule pour $(1+2kx+x^2) = 0$
   Et on obtient deux racines $-k \pm \sqrt{k^2-1}$
   La fonction est décroissante entre ces deux racines et croissante à l'extérieur.

6. Etudier la convexité de *g* pour *k*=1/2.
   On obtient : $g''(x) = (x^2+1)^{-3/2} e^x\,(x^4+2x^3+2x^2+2x+2)$
   Le signe de cette expression est donc celui de $z = (x^4+2x^3+2x^2+2x+2)$
   Et sa dérivée $z' = (x+1)(2x^2+x+2)$
   Elle s'annule en -1, *z* est égal à 1 pour cette valeur et reste toujours positive, donc la fonction est convexe.

Exercice n° 2

On considère la suite (u_n) définie, pour *n* entier naturel, par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$

1. Tracer le graphe de la fonction *f* définie pour $x \geq 1$ par : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$
   Sa dérivée est égale à $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et la fonction est donc strictement décroissante de $[1,+\infty[$ sur $[2,1[$. Le graphe de *f* coupe la première bissectrice en $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

2. Etudier la convergence de la suite (u_n).
   On vérifie par récurrence que $u_n > 1$ pour *n*>1. L'examen du graphe de *f* nous conduit à considérer la suite des termes de rang pair et celle de rang impair. On a :
   $u_{2n} = \dfrac{1+2u_{2n-2}}{1+u_{2n-2}}$. La suite (u_{2n}) est croissante et majorée par $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   La suite (u_{2n+1}) vérifie la même relation, elle est décroissante et minorée par *l*. Les deux suites sont convergentes vers *l*, et donc aussi (u_n).

3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt$

   $$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt = \lim_{x\to+\infty} \left[Ln\,t - \frac{1}{t}\right]_1^x = \lim_{x\to+\infty} \left(Ln\,x - \frac{1}{x} + 1\right) = +\infty$$

4. Soit $I_\alpha(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t^\alpha}\,dt$. Pour quelles valeurs de α, $I_\alpha(x)$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

   On sait que : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$, donc il faut $\alpha > 1$.

Exercice n° 3

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par :

$$f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f cette fonction prolongée. On a : $|f(x)| \leq x^2$ et *f(x)* tend vers zéro quand x tend vers zéro. D'où *f(0)=0.*
2. Etudier la dérivabilité de f sur R, ainsi que la continuité de sa fonction dérivée.

   On a : $f'(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ si x est non nul et $f'(0) = 0$. La limite de $f'(x)$ n'existe pas quand x tend vers zéro, donc f n'est pas de classe C^1

3. Résoudre, dans R, l'équation : $f(x) = 0$. On trouve $x = 0$ ou $x = \frac{1}{k\pi}$ $(k \in Z^*)$.

Exercice n° 4

Soit f une fonction numérique d'une variable réelles définie par :

$$f(x) = (1-k)^3 x^2 + (1+k)x^3,$$

où k est un paramètre réel.
Pour quelles valeurs de k, l'origine est-elle un extremum local pour f ?

On a : $f'(x) = 2(1-k)^3 x + 3(1+k)x^2$ et $f''(x) = 2(1-k)^3 + 6(1+k)x$, puis $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2(1-k)^3$. Si $k \neq 1$, alors 0 est extremum local. Si k=1, alors $f(x) = 2x^3$ et 0 n'est pas un extremum local.

Exercice n° 5

Soient f et g deux applications numériques définies sur R^{+*}, où f est convexe et g affine.
On suppose que :

(1) $\forall x > 0, \quad f(x) \leq g(x)$
(2) $f(1) = g(1)$

Comparer f et g.

On suppose que $f \neq g$, alors $\exists y > 0, y \neq 1, \ f(y) \neq g(y)$ et même $f(y) < g(y)$.
Comme *g* est affine, $g(y) = ay + b$ et *f* étant convexe, pour α compris entre zéro et 1, on a :

$$f(\alpha y + (1-\alpha)1) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha) f(1) < \alpha g(y) + (1-\alpha)(a+b)$$

et pour $\alpha = 0$, $f(1) = g(1) = a + b < a + b$, d'où la contradiction, donc $f = g$.

Exercice n° 6

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ par changement de variable ou intégration par parties (on peut écrire au numérateur : $1 = (1+x^2) - x^2$).

$\displaystyle\int_1^2 x^2 \, Log\, x \, dx = \frac{8}{3} Ln2 - \frac{7}{9}$ par intégration par parties

$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 4x + 7}\,dx = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ par décomposition canonique du dénominateur en posant $u = \dfrac{x+2}{\sqrt{3}}$