

Exercice 1

1) Pour que l'équation soit définie, on doit avoir $x > -4$ et $x < 3$.
 $\ln(x+4) = \ln(6-2x) \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

2) Pour que l'équation soit définie, on doit avoir
 $x > 2$. $\ln(3x+5) + \ln(x-2) = \ln 3 \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{157}}{6}$ ou $\frac{1+\sqrt{157}}{6}$. La solution est donc
 $\frac{1+\sqrt{157}}{6}$.

3) Pour que l'inéquation soit définie, on doit avoir $x > 0$. En utilisant $X = \ln x$ et le fait que
 $X^2 - 4X - 5 = (X+1)(X-5)$, on trouve que l'ensemble des solutions est
 $]0, 1/e] \cup [e^5, +\infty[$.

4) Les solutions sont 0 et $\ln 4$.

Exercice 2

1) La variable aléatoire X donnant le nombre de femmes choisies suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,5$.

$$P(A) = \binom{10}{8} (0,5)^{10} = 0,044$$

$$P(B) = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) = 0,055$$

2) L'événement contraire de l'événement H « Il y a au moins un homme dans l'échantillon de n personnes » est l'événement \bar{H} « Il y a n femmes dans l'échantillon ». On veut $P(H) > 0,999$. C'est à dire $1 - (0,5)^n > 0,999$. On obtient $n \geq 10$.

Exercice 3

Partie A - Construction d'une suite de nombre réels convergeant vers $\sqrt{2}$

- 1) Evident
- 2) Graphique non fait ici (le graphe de la fonction est une hyperbole)
- 3) $u_n \geq 0$: évident de part la fonction f sur le domaine de définition
 $u_n \leq 1$: démonstration par récurrence en calculant $u_{n+1} - 1$
- 4) Evident en faisant le rapport des valeurs absolues
- 5) Il suffit de montrer que $\frac{1}{(1+\sqrt{2})(2+u_n)} \leq \frac{1}{4}$, ce qui est aisé en utilisant la question 4
- 6) La limite de la suite $(u_n + 1)$ est $\sqrt{2}$

Partie B - Propriétés de la suite (u_n)

- 1) $u_0 = 0, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{2}{5}, u_3 = \frac{5}{12}, u_4 = \frac{12}{29}, u_5 = \frac{29}{60}$
- 2) Démonstration par récurrence
- 3) Etape 1 : la suite (u_n) est positive (question A4).
Etape 2 : on montre que $u_{n+2} - u_n > 0$ quand $u_n < \sqrt{2} - 1$ et que $u_{n+2} - u_n < 0$ quand $u_n > \sqrt{2} - 1$
Etape 3 : on montre par récurrence que tous les termes pairs de la suite (u_n) sont plus petits que $\sqrt{2} - 1$ et que tous les termes impairs de la suite (u_n) sont plus grands que $\sqrt{2} - 1$
- 4) a) En résolvant, on trouve $u' = u$ et $v' = v - 2u$
b) Evident et la question précédente montre que $p_{n+1} = q_n$ et $q_{n+1} = 2q_n + p_n$ sont bien premiers entre eux
c) Etape 1 : on montre que $q_{n+1} - q_n = q_n + q_{n-1}$
Etape 2 : on résout l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$ qui donne comme racines $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2} + 1$
Etape 3 : q_n s'écrit sous la forme $\alpha(1 + \sqrt{2})^n + \beta(1 - \sqrt{2})^n$. On résout en utilisant les premières valeurs de la suite (q_n) et on trouve $\alpha = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\beta = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

Exercice 4

- 1) On remarque que $f(x) = x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$. Ainsi, la fonction f est continue en 0 et f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$. La fonction f est continue sur \mathbb{R} . En la dérivant, on constate qu'elle est strictement croissante. De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$. La fonction f est une bijection strictement croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Elle admet donc une fonction réciproque définie sur \mathbb{R} .
- 2) Puisque $f'(0) \neq 0$ et que la fonction f est \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0, la fonction réciproque est indéfiniment dérivable au voisinage de 0. En posant $f^{-1}(x) = ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3)$ et en utilisant le fait que $f \circ f^{-1}(x) = x$, on a :

$$a = 1, b = 0, c = -1/2$$

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1

a) I_{PIB} (Cameroun) = 0,431 ; I_{PIB} (Mali) = 0,346

Ces indices sont, par construction, compris entre 0 et 1. La valeur 1 de l'indice est atteinte par le Qatar. On s'aperçoit que ces deux pays, bien qu'ayant un rapport de presque 1 à 2 en valeur sur le PIB/hab , sont relativement proches en terme d'indice.

b) I_{vie} (Cameroun) = 0,498 ; I_{vie} (Sénégal) = 0,620

La valeur de ces indices est toujours comprise entre 0 et 1 et l'écart constaté entre ces deux pays est plus élevé que dans la question précédente. Le dénominateur (83,4-20) est l'amplitude entre la valeur minimale définie comme valeur de subsistance et l'espérance de vie à la naissance constaté dans un pays donné, en l'occurrence au Japon en 2011.

- c) Pour calculer l'indice demandé, il faut d'abord calculer les deux indices élémentaires sur les deux indicateurs :

$$I_1(\text{Cameroun}) = 0,374 ; I_2(\text{Cameroun}) = 0,572$$

$$I_1(\text{Niger}) = 0,107 ; I_2(\text{Niger}) = 0,078$$

On en déduit : $I_{éducation}$ (Cameroun) = 0,473 et $I_{éducation}$ (Niger) = 0,093

Là encore, la valeur des indices est comprise par construction entre 0 et 1. L'écart entre les deux pays proposés est très grand puisque le rapport est presque de 5.

Question 2

- a) Evident : il suffit de copier le tableau 1 proposé en remplissant les cases vides avec les calculs faits à la première question.
- b) On s'aperçoit que l'indicateur sur l'espérance de vie est moins discriminatoire que les deux autres indicateurs. Si l'on devait choisir parmi les trois indicateurs, il apparaît que c'est l'éducation qui est le facteur le plus discriminant pour les pays proposés.

Question 3

Il ne faut pas utiliser les données du tableau 2 mais il faut se servir des calculs réalisés à la question 1 et figurant en résumé dans le tableau 1 :

IDH (Cameroun) = 0,467 ; IDH (Mali) = 0,402 ; IDH (Niger) = 0,336 ;
 IDH (Sénégal) = 0,471

Question 4

- a) Les pays qui ont les plus faibles montants sur le ratio PIB/hab sont aussi ceux qui ont un IDH faible, il y a une forte hétérogénéité entre les pays, etc.
- b) Le coefficient de détermination, noté r^2 est le rapport de la covariance au carré divisé par le produit des variances : $r^2 = \frac{\text{Covariance}(PIB/hab ; IDH)^2}{\text{Variance}(PIB/hab) \times \text{Variance}(IDH)}$

Donc $r^2 = 0,318$

Ce coefficient n'est pas proche de 1, ce qui signifie qu'il n'y a pas une forte corrélation entre les deux variables observées (IDH et PIB/hab). Cependant, compte tenu du faible nombre de pays, on peut penser que le calcul aurait été tout autre si le Qatar avait été enlevé du tableau.