

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Économie**

**MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

**Note :** *Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans l'ordre voulu par le candidat.*

**Exercice 1**

**Partie A**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

Où  $\ln$  désigne le logarithme népérien.

- 1 . Etudier les variations de  $f$  et de  $g$  sur  $[0; +\infty[$
- 2 . En déduire un encadrement de  $\ln(1+x)$

**Partie B**

On se propose d'étudier la suite  $(u_n)$  de nombres réels définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n \left( 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

- 1 . Montrer que  $u_n > 0$  pour tout entier naturel  $n \geq 1$
- 2 . Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :

$$\ln u_n = \ln \left( 1 + \frac{1}{2} \right) + \ln \left( 1 + \frac{1}{2^2} \right) + \dots + \ln \left( 1 + \frac{1}{2^n} \right)$$

3 . On pose  $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$  et  $T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n}$

Montrer que :

$$S_n - \frac{1}{2} T_n \leq Ln \quad u_n \leq S_n$$

4 . Calculer  $S_n$  et  $T_n$  en fonction de  $n$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

5 . Etude de la convergence de la suite  $(u_n)$

- Montrer que la suite  $(u_n)$  est strictement croissante
- En déduire que  $(u_n)$  est convergente. Soit  $\ell$  sa limite
- En déduire un encadrement de  $\ell$

## **Exercice 2**

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est de 0,4 et, s'il décroche, la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire est 0,3.

1 . On note :

- .  $D_1$  l'évènement : « la personne décroche au premier appel » ;
- .  $R_1$  l'évènement : « la personne répond au questionnaire lors du premier appel »

Calculer la probabilité de l'évènement  $R_1$

2 . Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité pour que le correspondant ne décroche pas la seconde fois est de 0,3 et la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire sachant qu'il décroche est 0,2. Si une personne ne décroche pas lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note :

- .  $D_2$  l'évènement « la personne décroche au second appel »
- .  $R_2$  l'évènement « la personne répond au questionnaire lors du second appel »
- .  $R$  l'évènement « la personne répond au questionnaire »

Calculer la probabilité de l'évènement  $R$

3 . Sachant qu'une personne a répondu au questionnaire, calculer la probabilité pour que la réponse ait été donnée lors du premier appel.

4 . Un enquêteur a une liste de 25 personnes à contacter. Les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Calculer la probabilité pour que 20% des personnes répondent au questionnaire.

### **Exercice 3**

Déterminer a et b pour que la partie principale du développement limité en 0 de la fonction  $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$  soit de degré le plus grand possible.

### **Exercice 4**

Soit  $(v_1, \dots, v_n)$  une famille libre d'un espace vectoriel réel  $E$ . Pour  $k = 1, \dots, n-1$ , on pose  $w_k = v_k + v_{k+1}$  et  $w_n = v_n + v_1$ . Etudier l'indépendance linéaire de la famille  $(w_1, \dots, w_n)$ .

### **Exercice 5**

Dans  $C$  (ensemble des nombres complexes), on appelle polynômes de Legendre les polynômes  $P_n(X) = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$ . (Remarque : la notation  $(n)$  en exposant signifie qu'il s'agit de la dérivée d'ordre  $n$ ).

1 . Calculer le degré de  $P_n$  et son coefficient dominant.

2 . Pour  $0 \leq p \leq n$ , on pose  $Q_p(X) = ((X^2 - 1)^n)^{(p)}$ .

a. Donner le degré de  $Q_p$

b. Démontrer que  $Q_p$  admet deux zéros d'ordre  $n - p$ , et  $p$  zéros d'ordre 1.

3 . En déduire que  $P_n$  s'annule exactement en  $n$  points deux à deux distincts de  $] -1, 1[$ .

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Économie**

**ORDRE GÉNÉRAL**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.**

**Sujet n° 1**

Le secteur des technologies de l'information et de la communication est en croissance en Afrique, avec une forte augmentation de l'utilisation d'Internet et de la téléphonie mobile. Exposez dans quelle mesure cela est un indicateur de développement.

**Sujet n° 2**

Un des huit objectifs du millénaire pour le développement<sup>1</sup> est de préserver l'environnement. Explicitez en quoi cela constitue un enjeu pour éliminer la pauvreté.

**Sujet n° 3**

Le 10 octobre 2013, Joyce Banda, la présidente du Malawi (Etat d'Afrique australe), a limogé son gouvernement après la révélation d'une affaire de soupçons de corruption et de détournement de fonds publics. Une telle décision peut-elle rétablir la confiance avec la population et les bailleurs de fonds ? Prolongez votre propos en exposant d'autres mesures propices à rétablir la confiance.

---

<sup>1</sup> Le Sommet du Millénaire, qui s'est tenu du 6 au 8 septembre 2000 au Siège de l'Organisation des Nations Unies, à New York, s'est conclu avec l'adoption par les 189 États Membres de la Déclaration du Millénaire, dans laquelle ont été énoncés les huit objectifs du Millénaire pour le développement (OMD).

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Économie**

**ÉCONOMIE**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

**Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.**

**Sujet n° 1**

**Croissance et inégalités.**

**Sujet n° 2**

**MICROECONOMIE (10 points)**

**Le producteur (7 points)**

Soit un producteur en concurrence parfaite dont la fonction de coût est donnée par :

$$C(q) = 2q^3 + 32$$

Soit  $p$ , le prix de l'output.

- 1) Est-ce une approche d'équilibre général ou partiel (justifiez votre réponse) ?
- 2) Après avoir rappelé leur définition, donnez les fonctions de coût marginal et de coût moyen.
- 3) Quel est le seuil de rentabilité ? Interprétez.
- 4) Quelle est la fonction d'offre du producteur ? Interprétez.

5) Représentez succinctement sur un graphe le profit du producteur pour un prix  $p$  quelconque.

Supposons désormais que ce producteur est en situation de monopole et qu'il fait face à une demande donnée par :

$$S(p) = 60 - p$$

6) Ce monopole est-il naturel (justifiez votre réponse) ? Quelles peuvent être les causes d'un tel monopole ?

7) En quoi son comportement change par rapport à la concurrence parfaite ?

8) Donnez son choix optimal.

9) Représenter succinctement sur un graphe le choix du monopole. Combien aurait produit à ce prix le producteur en concurrence parfaite ? Comparez l'efficacité des deux situations, du point de vue du producteur puis des consommateurs.

### L'échange (3 points)

Deux consommateurs  $A$  et  $B$  ont les mêmes préférences représentées par la fonction d'utilité :

$$U(q_1, q_2) = q_1 q_2^3$$

Leurs dotations initiales sont  $Q_{A0} = (6, 2)$  et  $Q_{B0} = (1, 9)$ .

1) Ont-ils intérêt à échanger (justifiez votre réponse) ?

2) Donnez les fonctions de demande de biens de chacun en fonction des prix  $p_1$  et  $p_2$  donnés.

3) Donnez la fonction de demande nette globale de bien 1. *En déduire* celle de bien 2.

4) En prenant le bien 1 comme numéraire, donnez un vecteur de prix d'équilibre.

### MACROECONOMIE (6 points)

On considère le modèle offre globale – demande globale (AS – AD, en anglais), où  $Y, N, L^S, W, P^e, u, z, L^d, P$  et  $\mu$  sont respectivement la production, la population active occupée, l'offre de travail, le salaire nominal, le niveau général des prix anticipé, le taux de chômage, les allocations chômage, la demande de travail, le niveau général des prix et le taux de marge des entreprises.

[1]  $Y = N$  décrit la fonction de production,

[2]  $L^S = \frac{W}{P^e} + 2(u - z)$  décrit la fonction d'offre de travail,

[3]  $L^d = -\frac{W}{P^e}$  décrit la fonction de demande de travail,

[4]  $P = (1+\mu) W$  est l'équation de prix (les entreprises étant supposées influencer le niveau général des prix),

[5]  $Y = Y(M/P, G, T)$  où  $Y(\cdot)$  est la fonction de demande globale, avec  $M$ , la masse monétaire,  $G$ , les dépenses publiques et  $T$ , les impôts.

### Questions

1) D'après ce qui précède, les marchés du travail et des biens sont-ils en concurrence parfaite (justifiez votre réponse) ?

2) A l'équilibre du marché du travail, quelle est l'expression du salaire nominal ? Sur la base de cette expression, précisez la manière dont le salaire nominal varie avec le taux de chômage et avec les allocations chômage, en étayant, à chaque fois, votre réponse à l'aide d'un raisonnement « économique » utilisant les équations du modèle.

3) Déterminez l'équation d'offre globale et indiquez de quelle manière varie  $P$  avec  $u$ .

4) En déduire la relation entre  $P$  et  $Y$  (rappel :  $U + N = L$ , avec  $U$ , nombre de chômeurs et  $L$ , la population active) ainsi que le sens de variation de la courbe d'offre globale.

5) Après avoir rappelé de quelle manière varie la demande globale par rapport à chacun de ses arguments (représentés dans l'équation [5]), précisez l'effet d'une augmentation de  $P$  sur la demande globale ; déduisez-en le sens de variation de la courbe de demande globale.

### QUESTIONS (4 points)

1) La valeur travail chez Marx.

2) A l'aide d'un diagramme d'Edgeworth, expliquez le lien entre échange et critère d'efficacité de Pareto.

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Économie**

**ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE**

**(Durée de l'épreuve : 2 heures)**

*Note : La note finale tiendra compte, de façon non négligeable, des commentaires donnés après chaque résultat.*

Un méthodologue du ministère chargé de la statistique doit effectuer un audit du plan de sondage actuel pour une enquête réalisée mensuellement.

**1. Le plan de sondage actuel**

L'échantillon des entreprises interrogées dans l'enquête mensuelle est tiré dans le champ des entreprises ayant répondu à l'enquête annuelle.

A la date de tirage des échantillons pour l'enquête mensuelle de l'année N (date qui se situe vers la fin du dernier trimestre N-1), les résultats de l'enquête annuelle N-2 sont disponibles. L'échantillon est donc tiré à partir des informations datées de deux ans.

L'unité d'échantillonnage est un produit d'une entreprise.

La méthode de tirage des échantillons de l'enquête mensuelle n'est pas aléatoire. Pour un produit donné, la méthode de sélection consiste à :

- trier les entreprises concernées par le produit par valeurs décroissantes de chiffre d'affaires réalisé pour le produit considéré ;
- retenir les entreprises dans l'échantillon jusqu'à couvrir au moins 75% du chiffre d'affaires total du produit.

Dans cet exercice, l'audit portera sur un seul produit.



## **2. Description des données**

Sur le produit concerné par l'exercice, le tableau joint en annexe vous donne les réponses individuelles des entreprises à l'enquête annuelle pour les années 2011 et 2012.

En 2012, 39 entreprises ont répondu à l'enquête annuelle. L'échantillon pour l'enquête mensuelle 2014 est donc choisi avec ces données.

Question 1 : à la lecture du tableau joint en annexe, indiquer le nombre d'entreprises ayant répondu en 2011 à l'enquête annuelle.

Question 2 : indiquer le nombre d'unités qui n'étaient pas présentes en 2011 dans l'enquête annuelle, le montant total en kE qu'elles représentent en 2012, la part qu'elles représentent en 2012.

Question 3 : compléter le tableau ci-dessous sur la base des entreprises présentes dans la base de sondage des données 2012 et 2011 (c'est-à-dire répondantes sur les deux années) :

	Présents dans l'échantillon 2014 et dans la base de sondage 2012 et 2011	Absents de l'échantillon 2014 et présents dans la base de sondage 2012 et 2011	<b>Total</b> (présents dans la base de sondage 2012 et 2011)
Somme des montants 2012			
Somme des montants 2011			
Taux d'évolution			

Question 4 : indiquer le biais de la méthode actuelle qui est la différence entre l'évolution réelle et celle constatée dans l'échantillon.

Question 5 : commenter les résultats obtenus.

## **3. Comment assurer une certaine continuité avec la méthode de tirage précédente**

L'introduction d'une méthode aléatoire, représentant l'ensemble des unités, dans le tirage de l'échantillon, devrait permettre de produire une estimation du taux d'évolution plus proche de la réalité.

Si l'on souhaite assurer une certaine continuité avec les méthodes de tirage précédentes, il paraît intéressant d'imposer une strate exhaustive couvrant une certaine part du montant total du produit (actuellement la procédure consiste à sélectionner les plus grandes entreprises concernées par un produit jusqu'à couvrir au moins 75% du montant total du produit).

Question 6 : à la lecture du tableau joint en annexe, indiquer la taille actuelle  $n$  de l'échantillon 2014.

Question 7 : calculer le seuil de couverture correspondant à un tirage proportionnel au montant avec la

taille d'échantillon actuelle selon la formule  $n \frac{y_k(2012)}{t_y(2012)} \geq 1$ , où  $t_y(2012)$  est la somme

des  $y_k(2012)$  des entreprises présentes. Ici  $t_y(2012)$  est égal à 287.994 keuros.

**Question 8** : indiquer le nombre d'entreprises sélectionnées par la méthode de la question précédente et le seuil de couverture.

Dans la suite, on a effectué les calculs avec trois taux de couverture différents : 0% (pas de strate exhaustive), 19,1%, 76,2%. Pour notre produit, les nombres d'unités à tirer dans la strate exhaustive sont, en fonction des taux de couverture en montant visés, les suivants :

Taux de couverture pour la strate exhaustive	Seuil de $y_k$ correspondant en kE	Nombre d'unités dans la base de sondage 2012	dont présentes aussi dans la base de sondage 2011
0%	40.000	0	0
19,1%	18.000	2	2
76,2%	7.800	16	15

#### **4. Partie non exhaustive**

Dans cette première approche, on sélectionne un échantillon de taille  $n_{nexh}$  selon un sondage aléatoire simple dans la partie non exhaustive de façon à ce que l'écart-type dû à l'échantillonnage de l'estimation du taux d'évolution soit de  $x$ .

On se limite aux unités de la base de sondage 2012 qui étaient présentes en 2011 et on calcule les  $u_k$  :

$$u_k = \frac{1}{t_y(2011)} \left( y_k(2012) - \frac{t_y(2012)}{t_y(2011)} y_k(2011) \right) \text{ avec } t_y(2012) = 275.407 \text{ et } t_y(2011) = 301.708$$

On peut calculer le nombre d'unités à tirer dans la partie non exhaustive  $n_{nexh}$  pour obtenir un écart-type dû à l'échantillonnage noté  $x$  avec la formule suivante :

$$n_{nexh} = \frac{1}{\frac{x^2}{N_{nexh}^2 S_{unexh}^2} + \frac{1}{N_{nexh}}} \text{ avec } S_{unexh}^2 = \frac{1}{n_{nexh} - 1} \sum_{nexh} (u_k - \bar{u})^2$$

Où  $\bar{u}$  désigne la moyenne des  $u_k$  et  $N_{nexh}$  le nombre d'unités dans la partie non exhaustive.

On obtient les résultats suivants lorsque l'on fait varier le taux de couverture pour la strate exhaustive et l'écart-type dû à l'échantillonnage visé :

Taux de couverture pour la strate exhaustive	Écart-type dû à l'échantillonnage pour l'estimation du taux d'évolution $X$	Nombre d'unités à tirer parmi les présents-présents dans la strate exhaustive	Nombre d'unités à tirer parmi les présents-présents dans la strate non exhaustive	Nombre d'unités à tirer au total parmi les présents-présents
0%	0,01	0	36	36
19,1%	0,01	2	29	31
75%	0,01	15	16	31
0%	0,02	0	34	34
19,1%	0,02	2	20	22
75%	0,02	15	9	24
0%	0,03	0	32	32
19,1%	0,03	2	13	15
75%	0,03	15	5	20
0%	0,04	0	29	29
19,1%	0,04	2	9	11
75%	0,04	15	3	18
0%	0,05	0	27	27
19,1%	0,05	2	6	8
75%	0,05	15	2	17

Question 9 : avec la taille d'échantillon actuelle que vous avez indiqué à la question 6 et en prenant le taux de couverture que vous avez indiqué à la question 8, donner une estimation de l'écart-type dû à l'échantillonnage du taux d'évolution.

Question 10 : commenter les résultats obtenus.

---

## Annexe

### Liste des entreprises fabricant le produit étudié avec leurs facturations annuelles

NUM K	Enquête mensuelle		Données de l'enquête annuelle			
	SELECTION 2014	PRESENCE ECHANTILLON 2013	MONTANT 2011 (en keuros) y <sub>k</sub> (2011)	MONTANT 2012 (en keuros) y <sub>k</sub> (2012)	PDSIND 2012	PDSCUM 2012
1	1	1	66312	36320	12,6%	12,6%
2	1	1	16345	18782	6,5%	19,1%
3	1	1	15820	16146	5,6%	24,7%
4	1	1	15455	15362	5,3%	30,1%
5	1	1	15228	15228	5,3%	35,4%
6	1	1	12665	14025	4,9%	40,2%
7	1	1	13418	13481	4,7%	44,9%
8	1	1	13357	12350	4,3%	49,2%
9	1	0		11100	3,9%	53,1%
10	1	0	8112	10345	3,6%	56,6%
11	1	0	6798	10260	3,6%	60,2%
12	1	1	11377	10094	3,5%	63,7%
13	1	1	9723	9900	3,4%	67,2%
14	1	1	9336	9736	3,4%	70,5%
15	1	0	8670	8401	2,9%	73,4%
16	1	1	7563	7850	2,7%	76,2%
17	0	0	5654	6382	2,2%	78,4%
18	0	0	5739	5962	2,1%	80,5%
19	0	0	6823	5404	1,9%	82,3%
20	0	1	9951	5403	1,9%	84,2%
21	0	0	5028	5220	1,8%	86,0%
22	0	0	3200	4366	1,5%	87,5%
23	0	0	5507	4336	1,5%	89,0%
24	0	0	3819	3910	1,4%	90,4%
25	0	0	2951	3856	1,3%	91,7%
26	0	0	3320	3678	1,3%	93,0%
27	0	0	3556	3112	1,1%	94,1%
28	0	0	2576	3067	1,1%	95,2%
29	0	0	3301	2984	1,0%	96,2%
30	0	1	2688	2298	0,8%	97,0%
31	0	0	2211	2215	0,8%	97,8%
32	0	0	1998	1881	0,7%	98,4%
33	0	0	1666	1503	0,5%	98,9%
34	0	0		1487	0,5%	99,5%
35	0	0	878	1130	0,4%	99,9%
36	0	0	42	203	0,1%	99,9%
37	0	0	436	102	0,0%	100,0%
38	0	0	145	75	0,0%	100,0%
39	0	0	40	40	0,0%	100,0%

**NUM** : il s'agit du numéro de l'entreprise permettant de la repérer dans la base de sondage.

**SELECTION 2012** : il s'agit d'une indicatrice : 0 signifie que l'entreprise n'est pas sélectionnée dans l'échantillon de l'enquête mensuelle selon la méthode actuelle et 1 qu'elle l'est.

**PRESENCE ECHANTILLON 2011** : il s'agit d'une indicatrice : 0 signifie que l'entreprise n'était pas sélectionnée en 2011 dans l'enquête mensuelle et 1 qu'elle l'était.

**MONTANT 2011 et MONTANT 2012** : il s'agit des montants de facturations figurant dans l'enquête annuelle.

**PDSIND 2012** : il s'agit du poids économique de l'entreprise pour ce produit. Dans ce tableau, les entreprises sont classées selon ce critère.

**PDSCUM 2012** : il s'agit du poids économique cumulé.