AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. Résoudre l'équation : $e^{2x} + e^{x}(1-e) - e = 0$

On pose $X = e^{x}$ pour obtenir : $X^2 + X(1-e) - e = 0$ qui a deux solutions *e* et -1. Mais comme l'exponentielle est positive, on obtient *x*=1.

2. Calculer $\underset{n\to+\infty}{Lim}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \underset{n}{Lim}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}) = \underset{n}{Lim}(1-\frac{1}{n+1}) = 1$$

3. Calculer $I = \int_0^3 E(x)\ dx$, où *E(x)* désigne la partie entière de *x*.

$$I = \int_0^3 E(x)\ dx = \int_0^1 0\,dx + \int_1^2 1\,dx + \int_2^3 2\,dx = 3$$

4. On augmente la longueur d'un rectangle de 20% et on diminue sa largeur de 20%. Son aire a-t-elle variée ? Si oui, préciser cette variation en pourcentage.

Notons *L* la longueur et *l* la largeur du rectangle, sa surface est égale à $L \times l$ et en effectuant les changements, la surface est égale à : $1{,}2 \times L \times 0{,}8 \times l = 0{,}96 L \times l$; La surface a donc diminué de 4%.

5. Calculer la dérivée de $\frac{e^{x+1}}{1+x^2}$ au point *x*=1.

Pour $y = \frac{e^{x+1}}{1+x^2}$, on a $y' = \frac{e^{x+1}(x-1)^2}{(1+x^2)^2}$ et en 1 sa valeur est égale à 0.

6. Calculer l'intégrale $I=\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

$$I=\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx=\left[Ln(1+e^x)\right]_0^1=Ln(1+e)-Ln2$$

7. Soit f la fonction numérique d'une variable réelle strictement positive, définie par : $f(x)=x^{x^x}$. Calculer sa dérivée en x=1.

Rappelons la définition des puissances : $x^a=e^{a\,Ln\,x}$. Posons $z=x^x=e^{x\,Ln\,x}$ et sa dérivée est égale à : $z'=x^x\,(1+Ln\,x)$, d'où $f'(x)=x^{x^x}\times x^x\times\left[Ln\,x\;(1+Ln\,x)+\frac{1}{x}\right]$ et $f'(1)=1$

8. On considère le nombre x=4,584584584…Ecrire ce nombre sous la forme d'une fraction rationnelle.

On a : 1000 x=4584,584584 et par différence : 999x= 4580, d'où $x=\frac{4580}{999}$

9. Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Ln(1+x^2)}{e^{x^2}-1}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x^2)}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

10. Dans un train, 20% des voyageurs portent un chapeau, 60% des voyageurs sont des femmes et 20% des hommes portent un chapeau. Quel est le pourcentage de femmes qui portent un chapeau ?

Il y a 40% d'hommes dans le train, dont 20% portent un chapeau, soit 8% des voyageurs. Donc 12% de femmes portent un chapeau.

Exercice n° 2

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par : $f(x)=\frac{1}{2}x-Ln(x)$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La fonction est définie pour x>0. $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}=\frac{x-2}{2x}$.

La fonction est décroissante de $]0,2]$ sur $]+\infty,1-Ln2]$ et elle est croissante de $[2,+\infty[$ sur $[1-Ln2,+\infty[$. Elle admet une asymptote oblique d'équation : $y=\frac{1}{2}x$ et une asymptote verticale à l'origine.

2. Montrer que f admet un unique point fixe.

Un point fixe x vérifie : $f(x) = x$, soit $\frac{1}{2}x + Ln\,x = z = 0$. On étudie cette fonction z, qui est strictement croissante de R^{+*} sur R. Et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution, donc un unique point fixe.

3. Calculer $\int_1^2 f(x)\,dx$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + (x - x\,Ln\,x)\right]_1^2 = \frac{7}{4} - Ln4$$

Exercice n° 3

La fabrication d'un produit P nécessite de passer successivement par les machines A-B-C dans cet ordre. Le tableau suivant présente le temps de passage du produit dans chaque machine et la durée de fonctionnement des machines dans une journée.

Machine	Temps de passage	Durée
A	5 minutes	5 heures
B	10 minutes	6 heures
C	6 minutes	4 heures

Combien de produits peut-on fabriquer dans une journée ?

La machine A permet de fabriquer 12 produits en 1 heure, soit 60 produits

La machine B permet de fabriquer 6 produits en 1 heure, soit 36 produits

La machine C permet de fabriquer 10 produits en 1 heure, soit 40 produits

On peut donc fabriquer 36 produits dans la journée.

Exercice n° 4

Soit la fonction φ définie sur R (ensemble des nombres réels) par :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in R - Q \\ x^2 \text{ si } x \in Q \end{cases}$$

Où Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

1. Etudier la continuité de φ .

Rappelons que l'ensemble des nombres rationnels comme celui des irrationnels est dense dans l'ensemble des nombres réels.

Si $x_0 \in R-Q$, il existe une suite $x_n \in Q$ qui converge vers x_0 et $\phi(x_n) = x_n^2 \to x_0^2 \neq \phi(x_0)$, donc la fonction n'est pas continue en tout point irrationnel ;

Si $x_0 \in Q$, il existe une suite $x_n \in R-Q$ qui converge vers x_0 et $\phi(x_n) = 1 \to 1 = \phi(x_0) = x_0^2$, si et seulement si $x_0 = \pm 1$,

En conclusion la fonction n'est continue qu'en +1 et -1.

2. Etudier la dérivabilité de φ.

La fonction étant paire et continue qu'en +1 et -1. Il suffit d'étudier la dérivabilité en 1.

$$\text{On a } \frac{\phi(x)-\phi(1)}{x-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in R-Q \\ x+1 & \text{si } x \in Q-\{1\} \end{cases}$$

Ces deux expressions sont différentes en 1, donc la fonction n'est pas dérivable.

3. Soit $f(x) = \sin(x).\varphi(x)$, étudier la continuité de *f*.

$$\text{On obtient } f(x) = \begin{cases} \sin x \text{ si } x \in R-Q \\ x^2 \sin x \text{ si } x \in Q \end{cases}$$

Si $x_0 \in R-Q$, il existe une suite $x_n \in Q$ qui converge vers x_0 et $f(x_n) = x_n^2 \sin x_n \to x_0^2 \sin x_à = \sin x_0$ pour $x_0^2 = 1$ ou $\sin x_0 = 0$, soit $x_0 = \pi/2 + k\pi$

Si $x_0 \in Q$, il existe une suite $x_n \in R-Q$ qui converge vers x_0 et $f(x_n) = \sin x_n \to \sin x_à = x_0^2 \sin x_0$ pour $x_0^2 = 1$, soit $x_0 = \pm 1$;

En conclusion la fonction est continue sur $\{\pm 1\} \cup \{\pi/2 + k\pi\}$.

Exercice n° 5

On considère la fonction numérique g_y définie par:

$$g_y(x) = x^\alpha \times y^\beta, \text{ où } y, \alpha, \beta > 0$$

1. Etudier les variations de g_y et tracer son graphe.

La fonction est définie pour *x*>0 et rappelons que : $x^\alpha = e^{\alpha Ln x}$.

Sa dérivée est égale à : $g_y^{'}(x) = \alpha x^{\alpha-1} \times y^{\beta}$. La fonction est donc strictement croissante de R^{+*} sur R^{+*}.

Si $\alpha > 1$, la fonction est convexe avec une branche parabolique dans la direction verticale.

Si $\alpha < 1$, la fonction est concave avec une branche parabolique dans la direction horizontale.

Si $\alpha = 1$, la fonction est une droite.

2. On suppose que $ax + by \leq R$, où a et b sont des paramètres réels strictement positifs. Déterminer le maximum en *x* de la fonction g_y.

Comme la fonction est strictement croissante en *x*, le maximum est donc atteint pour la plus grande valeur de *x* qui satisfait la contrainte, à savoir $x = \dfrac{R - by}{a}$ et le maximum vaut $\left(\dfrac{R - by}{a}\right)^{\alpha} y^{\beta}$

3. Soit la fonction *h* définie par : $h(t) = \dfrac{(R - bt)^{\alpha} t^{\beta}}{a^{\alpha}}$, où $\alpha, \beta, R, a, b > 0$ et $\alpha + \beta = 1$. Etudier les variations de *h*.

La fonction est définie pour $R - bt > 0$ et $t > 0$, soit $0 < t < \dfrac{R}{b}$

Sa dérivée est égale à : $h^{'}(t) = \dfrac{(R - bt)^{\alpha-1}}{a^{\alpha}} t^{\beta-1} \left[\beta(R - bt) - \alpha bt\right]$

Comme $\alpha + \beta = 1$, $h^{'}(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\beta R}{b}$ et la fonction *h* est strictement croissante de

$$h(t) = \frac{(1-\beta)^{\alpha} R^{\alpha}}{a^{\alpha}} \times \frac{(\beta R)^{\beta}}{b^{\beta}} = M$$

La fonction *h* est strictement croissante de $\left]0, \dfrac{\beta R}{b}\right]$ sur $\left]0, M\right]$ et

La fonction *h* est strictement décroissante de $\left[\dfrac{\beta R}{b}, \dfrac{R}{b}\right[$ sur $\left[M, 0\right[$

Exercice n° 6

Pour chacune des questions suivantes indiquées si l’assertion est vraie ou fausse.

1. Il existe des fonctions numériques d’une variable réelle définies en tout point et continues en aucun. Si l’assertion est vraie, donner un exemple.

Exact, avec par exemple la fonction caractéristique des rationnels.

2. Toute fonction numérique d'une variable qui admet une dérivée première continue est deux fois dérivable.

Faux, la continuité n'implique pas la dérivabilité.

Exercice n° 7

Soit f l'application définie par : $f(x) = 2x + \sin(x)$.

1. Déterminer un développement limité de f à l'ordre 3 à l'origine.

$$f(x) = 3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

2. Montrer que f est une bijection et que son application réciproque f^{-1} est 3 fois continument dérivable.

$f^{'}(x) = 2 + \cos(x) \geq 1 > 0$ et $\underset{-\infty}{Lim}\, f(x) = -\infty$, $\underset{+\infty}{Lim}\, f(x) = +\infty$, donc f est une fonction strictement croissante de R sur R, c'est donc une bijection. L'application réciproque f^{-1} est aussi une fonction strictement croissante. Comme la dérivée n'est jamais nulle, (f^{-1}) est dérivable et $(f^{-1})^{'}(x) = \dfrac{1}{f^{'}(f^{-1}(x))}$. Par récurrence immédiate on en déduit que f^{-1} admet un développement limité à n'importe quel ordre.

3. Donner un développement limité de f^{-1} à l'ordre 3 en x=0.

On a $f(0) = 0$ et on peut appliquer la formule du développement limité de f^{-1} à $f(x)$ au voisinage de 0. On détermine les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 du développement limité à partir de l'égalité $f^{-1}(f(x)) = x$ qui équivalente à :

$$a_0 + a_1\left(3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + a_2\left(3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + a_3\left(3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o\left((3x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^3\right) = x$$

ou encore :

$$a_0 + a_1\left(3x - \frac{x^3}{6}\right) + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + o(x^3) = x$$

Et par identification des polynômes, on obtient : $a_0 = 0, a_1 = 1/3, a_2 = 0, a_3 = 1/18$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{x^3}{18} + o(x^3)$$

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{Ln(x+1)}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.

La fonction f est définie pour $x > -1$ et $x \neq 0$. Mais $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, on peut donc prolonger par continuité la fonction en posant : $f(0) = 1$.

Sa dérivée est égale à $f'(x) = \dfrac{x - (x+1)Ln(x+1)}{x^2\,(x+1)}$. Cette dérivée est négative sur l'ensemble de définition et la fonction est donc strictement décroissante de $\left]-1, +\infty\right[$ sur $\left]+\infty, 0\right[$. Le graphe de f admet deux asymptotes : x=-1 (verticale) et y=0 (horizontale). La fonction est convexe sur son ensemble de définition.

2. Monter que f admet un unique point fixe sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

La recherche d'un point fixe revient à résoudre l'équation : $f(x) = x$. Ce qui revient à résoudre : $Ln(x+1) - x^2 = 0$. On étudie donc cette fonction $z = Ln(x+1) - x^2$ et son tableau de variation montre l'existence d'un point unique avec le théorème des valeurs intermédiaires.

3. Calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{x}{x+1} f(x)\,dx$

Soit $I = \displaystyle\int_1^e \frac{x}{x+1} f(x)\,dx = \int_1^e \frac{Ln(x+1)}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[Ln^2(x+1)\right]_1^e = \frac{1}{2}(Ln^2(e+1) - Ln^2(2))$

Exercice n° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

Sa dérivée est égale à : $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ et cette dérivée s'annule en 0 et -2. La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$ et une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$.

La fonction est strictement croissante de $\left]-\infty,-2\right]$sur $\left]-\infty,-4\right]$,
La fonction est strictement décroissante de $\left[-2,-1\right[$sur $\left[-4,-\infty\right[$,
La fonction est strictement décroissante de $\left]-1,0\right]$sur $\left]+\infty,0\right]$,
La fonction est strictement croissante de $\left[0,+\infty\right[$sur $\left[0,+\infty\right[$,
La courbe se présente sous la forme d'une hyperbole oblique.

2. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$

Soit $I=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (x-1+\frac{1}{x+1})\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+Ln(x+1)\right]_0^1=-\frac{1}{2}+Ln2$

3. Montre que f admet un centre de symétrie que l'on précisera.

Le point A de coordonnées (-1, -2) est un centre de symétrie, en effet si on pose : $X=x+1;Y=y+2$, on obtient : $Y=X+\frac{1}{X}$ qui est une fonction impaire.

4. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0\neq -1 \; et \; u_{n+1}=f(u_n)$. Etudier la convergence de cette suite selon les valeurs de u_0.

Si la suite (u_n) est convergente, sa limite *l* vérifie : $l=f(l)$, à savoir *l*=0.

Pour $u_0>0,$ on vérifie par récurrence que $u_n>0,$ de plus $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{u_n}{1+u_n}<1$. La suite est donc décroissante et minorée, elle converge vers zéro.

Pour $u_0=0,$ la suite est stationnaire égale à zéro.

Pour $-1<u_0<0,$ on a : $u_1=\frac{u_0^2}{1+u_0}>0$, et on se ramène au premier cas où la suite converge vers zéro.

Enfin pour $u_0<-1$, on vérifie que : $u_{n+1}<u_n<-1$. Si la suite était convergente, sa limite serait inférieure à -1, donc elle est divergente.

Exercice n° 3

Soit $f:\left]0,+\infty\right[\to R$ définie par : $f(t)=\frac{Lnt}{t-1}$ si $t\neq 1$ et $f(1)=1,$ où Ln désigne le logarithme népérien.

Soit $F:\left]0,+\infty\right[\to R$ définie par : $F(x)=\int_x^{x^2} f(t)\,dt$

1. Etudier la continuité de f sur $\left]0,+\infty\right[$

Le seul problème est au point 1.

$\lim\limits_{t\to 1} f(t) = \lim\limits_{t\to 1}\dfrac{Lnt}{t-1} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{Ln(1+u)}{u} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{u} = 1 = f(1)$, donc *f* est continue sur $\left]0,+\infty\right[$

2. Déterminer le signe de *f* et celui de *F* sur $\left]0,+\infty\right[$.

Si $t>1$, $t-1>0$ et $Lnt>0$, donc la fonction *f* est positive et

Si $0<t<1$, $t-1<0$ et $Lnt<0$, donc la fonction *f* est encore positive.

Comme $x>0$ et *f* positive, *F* est positive.

3. Montrer que *F* est dérivable et calculer sa dérivée.

F est dérivable comme composée de fonctions dérivables et pour *x* différent de 1 :

$F'(x) = 2x\, f(x^2) - f(x) = 2x.\dfrac{Ln(x^2)}{x^2-1} - \dfrac{Lnx}{x-1} = \dfrac{(3x-1)Lnx}{x^2-1}$, et

$F'(1) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-x)\, f(c(x))}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} x.\, f(c(x)) = 1$, car f est continue.

4. Etudier les variations de *F* sur $\left]0,+\infty\right[$.

Pour $0<x<1/3$, $3x-1<0, Lnx<0$ et $x^2-1<0$, donc *F* est décroissante.

Pour $1/3<x<1$, $3x-1>0, Lnx<0$ et $x^2-1<0$, donc *F* est croissante.

Pour $x>1$, $3x-1>0, Lnx>0$ et $x^2-1>0$, donc *F* est croissante.

Exercice n° 4

On note *P* l'ensemble des nombres entiers pairs strictement positifs. Soit *n* un élément de *P*. On cherche à écrire *n* sous la forme d'une combinaison linéaire des *n* – 1 entiers qui le précèdent, c'est-à-dire 1, 2, 3, ..., *n* – 2, *n* – 1, tous les coefficients de cette combinaison n'étant que + 1 ou – 1. Par exemple, on a $4 = ((-1)\times 1) + (1\times 2) + (1\times 3)$.

En termes plus mathématiques, on cherche pour chaque $n \in P$ une décomposition de la forme :

$$\text{(E)} \qquad n = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k k$$

où le symbole ε_k est le coefficient +1 ou – 1 à affecter à l'entier *k*.

1. La décomposition d'un entier pair $n\in P$ est-elle unique ?

Par exemple 8=(-1+2)+(-3+4)+(5-6)+7=(1-2)+(-3+4)+(-5+6)+7. La décomposition n'est donc pas unique.

2. Déterminer le sous-ensemble de P pour lequel existe une décomposition de type (E).
On peut remarquer que 2 et 6 ne sont pas décomposables. Montrons par récurrence que tout nombre pair de la forme 4p est décomposable.

Pour p=1, la relation est vraie. On suppose que : $4p = \sum_{k=1}^{4p-1} \varepsilon_k k$

On obtient :

$$4p+4 = \sum_{k=1}^{4p-1} \varepsilon_k k + 4 = \sum_{k=1}^{4p-1} \varepsilon_k k - 1 + 2 + 3 = \sum_{k=1}^{4p-1} \varepsilon_k k - 4p - (4p+1) + (4p+2) + (4p+3) = \sum_{k=1}^{4p+3} \varepsilon_k k$$

Exercice n° 5

Etudier la nature des suites suivantes en précisant la limite pour celles qui sont convergentes.

1. $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - 1}$

On vérifie que : $\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1})$ et en sommant, les deux premiers termes de la première expression restent ainsi que les deux derniers de la deuxième expression. D'où

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

Et la suite va converger vers ¾.

2. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2 + 3k + 2}$

On vérifie que : $\frac{1}{k^2+3k+2} = (\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2})$ et en sommant, le premier terme de la première expression reste ainsi que le dernier de la deuxième expression. D'où

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} = (1 - \frac{1}{n+2})$$

Et la suite va converger vers 1.

3. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \le \frac{1}{2\sqrt{k}}$ et en sommant, on obtient :

$2(\sqrt{n+1} - 1) \le u_n$ et la suite est divergente.

Exercice n° 6

Pour tout entier naturel *n*, on pose : $I_n = \int_1^e t^2 \,(Lnt)^n \,dt$, où *Ln* désigne le logarithme népérien.

1. Calculer I_0

$$I_0 = \int_1^e t^2 \,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^e = \frac{1}{3}(e^3 - 1)$$

2. Calculer I_1

$$I_1 = \int_1^e t^2 \,Lnt\;dt = \left[\frac{1}{3}t^3\,Lnt\right]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{3}\,dt = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}(e^3 - 1) = \frac{1}{9}(2e^3 + 1)$$, en intégrant par parties.

3. Pour tout $n \geq 1$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}

On effectue une intégration par parties pour obtenir :

$$I_{n+1} = \int_1^e t^2\,(Lnt)^{n+1}\;dt = \left[\frac{1}{3}t^3\,(Lnt)^{n+1}\right]_1^e - (n+1)\int_1^e \frac{t^2}{3}(Lnt)^n\,dt = \frac{1}{3}e^3 - \frac{n+1}{3}I_n$$ ou encore

$$3I_{n+1} + (n+1)\,I_n = e^3$$

4. Etudier la convergence de la suite (I_n)

On vérifie par récurrence que la suite (I_n) est positive. On a :

$$I_n = \int_1^e t^3\,\frac{(Lnt)^n}{t}\,dt \leq e^3\int_1^e \frac{(Lnt)^n}{t}\,dt = e^3\left[\frac{(Lnt)^{n+1}}{n+1}\right]_1^e = \frac{e^3}{n+1}$$, on obtient : $I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$ et la suite est convergente vers zéro.