AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Question 1

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si a + b = 5. Pour obtenir 5, il faut tirer 1 et 4, ou 4 et 1, ou 2 et 3, ou 3 et 2, soit 4 tirages favorables sur les 4 x 4 possibles. La probabilité que les vecteurs soient orthogonaux est donc de 1/4.

Question 2

a) $p(A_1) = ¼ \times ¾ = 3/16$; $p(B_1) = ¾ \times ¼ = 3/16$; $p(C_1) = 1 - p(A_1) - p(B_1) = 5/8$
b) $p(C_{n+1}) = p(C_n) \times p(C_1)$
$p(C_{n+1}) = (5/8)^{n+1}$
c) $p(A_{n+1}) = p(C_n) \times p(A_1) = 3/16 \times (5/8)^n$

Question 3

a) 5/8 étant inférieur à 1, la limite de A_n est nulle.
b) $p(A_n)$ est inférieur ou égal à 0,01 si et seulement si $3/16 \times (5/8)^{n-1}$ est inférieur ou égal à 0,01. En poursuivant le calcul, on trouve que n doit être supérieur ou égal à 7,24. La solution pour avoir un entier est donc $n = 8$.

Exercice 2

Question 1

On a $\vec{v} = 2\vec{u}$. La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est donc liée. Quel que soit le vecteur $\vec{z}$, la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ restera liée.

Question 2

La famille $(\vec{u}, \vec{w})$ est libre. Le théorème de la base incomplète nous dit qu'on peut compléter la famille libre de deux vecteurs pour en faire une base de R^3. Par exemple, on prend un vecteur de la base canonique pour compléter. Ici, le vecteur $\vec{z}$ de coordonnées (1,0,0) convient.

Exercice 3

$$\frac{1}{1+bx^2} = 1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6)$$

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1 + (a-b)x^2 + (b^2 - ab)x^4 + (-b^3 + ab^2)x^6 + o(x^6)$$

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = \left(-a + b - \frac{1}{2}\right)x^2 + (-b^2 + ab + \frac{1}{24})x^4 + (b^3 - ab^2 - \frac{1}{720})x^6 + o(x^6)$$

Les termes d'ordres 2 et 4 disparaissent si $a = -\frac{5}{12}$ et $b = \frac{1}{12}$

Dans ce cas, on trouve comme partie principale de degré 6 : $\frac{1}{480}x^6$

Exercice 4

Question 1

Evident

Question 2

a) Démonstration par récurrence que les suites sont bien définies jusqu'à l'ordre *n* et vérifient la propriété demandée : c'est vrai au rang 0 et, en utilisant la question précédente, si c'est vrai au rang *n*, c'est vrai aussi au rang *n*+1.

b) Puisque $v_n \leq u_n$, on sait que :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{u_n + u_n}{2} = u_n$$

De même, on a

$$\frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_n} + \frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{v_n}$$

Ce qui prouve que la suite u_n est décroissante et que la suite v_n est croissante.

c) La suite v_n est croissante et majorée par u_0 (car $v_n \leq u_n \leq u_0$), donc convergente vers une limite notée b_1. De même, la suite u_n est décroissante et minorée par v_0, donc convergente vers une limite notée b_2. En utilisant que $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$, on a $b_2 = \frac{b_2+b_1}{2}$. Ceci prouve que b_1 est égal à b_2.

d) Soit G la moyenne géométrique de u_0 et v_0. On montre par récurrence que G est la moyenne géométrique de u_n et de v_n en utilisant la question 1 ($\sqrt{mh} = g$). Passant à la limite, on a : $\sqrt{b^2} = G$, ce qui est le résultat souhaité.

Exercice 5

Question 1

a) Si la matrice est de taille 1, le résultat est évident. On suppose le résultat vrai pour toute matrice carrée de taille n-1 vérifiant les conditions de l'énoncé, et on doit le prouver pour toute matrice carrée de taille n. Soit A = ($a_{i,j}$) une telle matrice carrée. On calcule son déterminant en développant par rapport à la première colonne, et on dote D_i le déterminant obtenu en barrant la ième ligne et la première colonne. On a donc :

$$\text{Det (A)} = a_{1,1}D_1 + \sum_{i=2}^{n} a_{i,1}(-1)^{i+1}D_i$$

Chaque D_i est un nombre entier d'après la formule qui permet de calculer le déterminant. Pour tout $i \geq 2$, $a_{i,1}$ est pair par définition et par conséquence, $a_{i,1}(-1)^{i+1}D_i$ est aussi un nombre pair. La somme de nombres pairs est un nombre pair et donc, $\sum_{i=2}^{n} a_{i,1}(-1)^{i+1}D_i$ est pair. De plus, $a_{1,1}$ est impair, et par hypothèse de récurrence D_1 aussi, donc $a_{1,1}D_1$ est impair. En réunissant tout, on obtient que Det (A) est un nombre entier impair.

b) Un entier impair est non nul, le déterminant de la matrice A est donc différent de zéro. La matrice A est inversible.

Question 2

a) Un tel calcul donne une matrice colonne dont chaque ligne porte la somme des nombres de la ligne correspondante de la matrice M. Comme il y a toujours autant de moutons dans chaque troupeau, la somme vaut en regroupant les termes : 50 x 0 + 50 x 2 + 1 = 101. Les résultats sont donc la matrice à 101 lignes

$$\begin{pmatrix} 101 \\ 101 \\ \vdots \\ 101 \\ 101 \end{pmatrix}$$

b) Un tel calcul donne une matrice colonne dont chaque ligne *i* est :

$$\text{poids mouton } i + 2 \text{ x } \sum_{mouton\ dans\ B} poids\ mouton\ + 0 \text{ x } \sum_{mouton\ dans\ A} poids\ mouton$$

Ce qui fait encore : poids mouton *i* + 2 x poids des moutons du troupeau *B.*

Maintenant, soit P le poids total du troupeau de mouton vaut :

P = poids mouton *i* + poids des moutons dans *A* + poids des moutons dans *B.*

Comme, par hypothèse, le poids des moutons dans *A* est égal au poids des moutons dans *B*, la matrice recherchée est :

$$\begin{pmatrix} P \\ P \\ \vdots \\ P \\ P \end{pmatrix}$$

c) C'est évident en utilisant la question 1.

d) D'après les questions 2.a et 2.b, on a :

$$MX = \mu M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Où $\mu = \frac{P}{101}$. Puisque *M* est inversible, on obtient en multipliant par M^{-1} à gauche le résultat :

$$X = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \vdots \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

C'est bien que tous les moutons ont le même poids.

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1

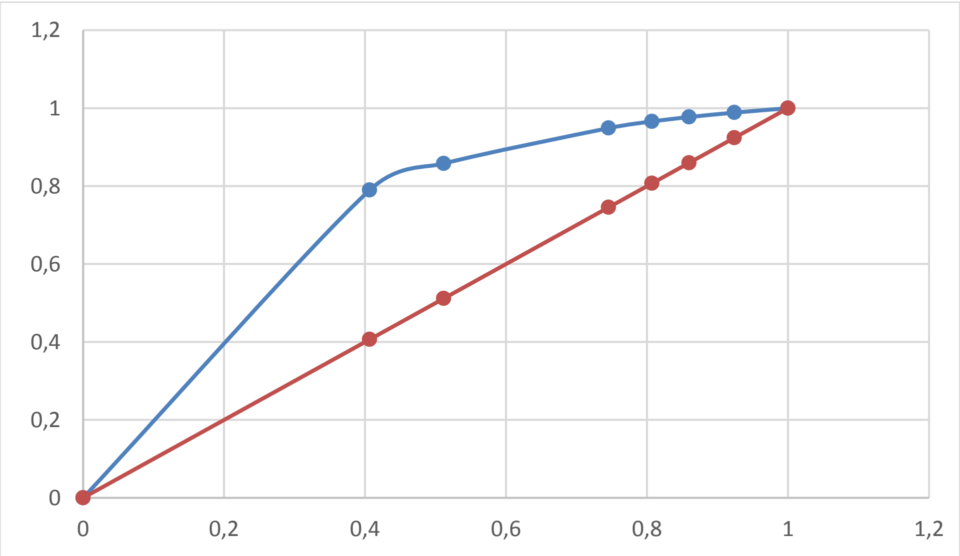
La moyenne est de 14.573,86 euros.

Question 2

$\alpha_1 = 0{,}7898$	$\beta_1 = 0{,}4064$
$\alpha_2 = 0{,}8580$	$\beta_2 = 0{,}5117$
$\alpha_3 = 0{,}9489$	$\beta_3 = 0{,}7456$
$\alpha_4 = 0{,}9659$	$\beta_4 = 0{,}8070$
$\alpha_5 = 0{,}9773$	$\beta_5 = 0{,}8596$
$\alpha_6 = 0{,}9886$	$\beta_6 = 0{,}9240$
$\alpha_7 = 1{,}0000$	$\beta_7 = 1{,}0000$

Question 3

Graphique



Question 4

a) $a = 0{,}2073$.
b) $g = 0{,}4146$.
c) L'indice de Gini varie de 0 à 1, et plus il est proche de 1, plus on dit que la concentration de la population étudiée est forte. Ici, il est proche de 0,5 ce qui signifierait que la concentration est plutôt faible.

Question 5

mse = 157500/2565000 x 176/3 = 3,602

Les factures comprises entre 45000 et 60000 euros ont presque 4 fois plus en masse qu'en effectif. Ceci dément le commentaire de la question précédente. L'indice de Gini n'est pas toujours suffisant pour étudier la concentration.

Question 6

a) Calcul de $mse\big(G(0{,}5)\big)$
Les 50% dernières factures sont les 88 (176/2) factures ayant les montants les plus élevés. Il y a 37 factures d'un montant supérieur à 15000 euros. Pour trouver les (88-37) factures manquantes pour faire 50%, il faut faire une estimation (règle de trois) dans la classe des factures de 0 à 15000 euros.

$$m(0{,}5) = \frac{(2565000-1042500)+((88-37)*7500)}{2565000} = \frac{1905000}{2565000} = 0{,}743$$

On a donc : $mse\big(G(0{,}5)\big) = 2 * m(0{,}5) = 1{,}49$

De même, on trouve que :

$$m(0{,}1) = \frac{(195000+165000+135000+157500)+((17{,}6-9)*52500)}{2565000} = 0{,}430$$

On a donc : $mse\big(G(0{,}1)\big) = 10 * 0{,}430 = 4{,}30$

b) La concentration globale est très proche de la moyenne alors que la concentration finale est très en dessous de la moyenne.