

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

**CORRIGE DE LA 1<sup>ère</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**Attention !**

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

**Exercice n° 1**

1. Calculer la dérivée de  $x^2 e^x + \text{Ln}(1+x^2)$  au point  $x=0$

La dérivée est égale à  $(x^2 + 2x)e^x + \frac{2x}{1+x^2}$  et au point  $x=0$ , cette dérivée est nulle.

2. Résoudre le système : 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

On obtient  $y = 6/x$ , puis  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$  : L'ensemble des solutions est :

$(3,2) ; (-3,-2) ; (2,3) ; (-2,-3)$

3. Calculer  $I = \int_{-1}^1 (x^4 + x^2 + 1) \sin(x) dx$ .

La fonction étant impaire, l'intégrale est nulle.

4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : 
$$\sum_{k=0}^n x^{2k} + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt = 0.$$

Tous les termes sont strictement positifs, donc l'équation n'admet aucune solution.

5. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^3}} + 2 \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^3}} + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{x^3}{2}\right)} + 2 \right) = 0$$

6.  $\lim_n u_n = \lim_n n(e^{1/n} - 1) = \lim_n n\left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = 1.$

7. Dans un repère orthonormé du plan, déterminer un vecteur unitaire orthogonal à la droite d'équation :  $x-y+1=0$ .

On obtient  $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$

8. Déterminer  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x^3 \ln(x) dx.$

Par intégration par parties, en posant  $u' = x^3$ , on obtient :

$$\int_{\varepsilon}^1 x^3 \ln(x) dx = \left[ \frac{x^4}{4} \ln x \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{x^3}{4} dx = -\frac{\varepsilon^4}{4} \ln \varepsilon - \frac{1}{16} + \frac{\varepsilon^4}{16}$$

-1/16

9. Résoudre l'équation :  $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x = 0.$

Cette équation s'écrit :  $x(x-1)(x-2)(x-3) = 0$  et les solutions sont : 0, 1, 2, 3

10. Les diverses parcelles d'une exploitation forestière donnent des bois de qualités différentes. On peut distinguer 3 types de parcelles selon le bois produit :

- Qualité supérieure : 80% des parcelles
- Qualité moyenne : 15% des parcelles
- Qualité inférieure : 5% des parcelles

Quelle est la probabilité de ramasser uniquement du bois de qualité supérieure en se rendant, de façon indépendante, dans 3 parcelles ? La probabilité est égale à  $(0,8)^3 = 51,2\%$

**Exercice n° 2**

Le paramètre  $t$  étant un nombre réel strictement positif, on pose  $y_t(x) = \frac{e^{-xt}}{xt}$

1. Etudier les variations de la fonction réelle  $y_t$  et donner l'allure de son graphe.

La fonction est définie pour  $x$  non nul. On a :  $y'_t(x) = \frac{-e^{-xt} t(xt + 1)}{(xt)^2}$  et cette dérivée est nulle pour  $x = -1/t$ . on a :  $y_t(-1/t) = -e$ . On a une branche parabolique dans la direction  $Oy$  à moins l'infini.

$x$	$-\infty$	$-1/t$	$0$	$0$	$+\infty$
$y'_t(x)$	+		-		-
$y_t(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty \rightarrow 0$

2. Calculer  $I_t = \int_0^1 x^2 y_t(x) dx$

$$I_t = \int_0^1 x^2 y_t(x) dx = \frac{1}{t} \int_0^1 x e^{-xt} dx = \frac{-1}{t^2} \left[ e^{-xt} \left( x + \frac{1}{t} \right) \right]_0^1 = \frac{1}{t^3} (1 - e^{-t}(t+1))$$

3. Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I_t$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} t^3 I_t$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I_t = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0} t^3 I_t = 1 - 1 = 0$$

### Exercice n° 3

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $[1, +\infty[$  par :

$$f(x) = -x - \sqrt{x^2 - 1} \text{ et } g(x) = -x + \sqrt{x^2 - 1}$$

1. Etudier les variations de  $f$  et  $g$  sur  $[1, +\infty[$ .

La dérivée de  $f$  est  $f'(x) = -1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} < 0$  et la fonction est décroissante de  $-1$  à  $-\infty$

La dérivée de  $g$  est  $g'(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > 0$  et la fonction est croissante de  $-1$  à  $0$

2. Pour  $k$  entier naturel non nul, on pose :  $I_k = [-k + \sqrt{k^2 - 1}, +\infty[$  et  $J_k = ]-\infty, -k - \sqrt{k^2 - 1}]$ . Montrer que ces deux suites  $(I_k)$  et  $(J_k)$  sont des suites monotones de segments emboîtés pour l'inclusion.

Comme  $g$  est croissante, on a :  $I_{k+1} \subset I_k$

Comme  $f$  est décroissante, on a :  $J_k \subset J_{k+1}$

3. Pour  $k$  entier naturel non nul, on pose :  $f_k(x) = \sqrt{x^2 + 2kx + 1}$ . Donner l'ensemble de définition de  $f_k(x)$  en fonction de  $I_k$  et  $J_k$ , et en déduire l'ensemble de définition de la fonction  $\varphi_n$  définie par :  $\varphi_n(x) = \left( \sum_{k=1}^n \sqrt{x^2 + 2kx + 1} \right) - \sqrt{n^2 x^2 + 1}$

La résolution de l'équation  $x^2 + 2kx + 1 > 0$ , montre que le domaine de définition de  $f_k(x)$  est  $I_k \cup J_k$  et on en déduit que le domaine de définition de  $\varphi_n$  est  $I_n \cup J_n$

4. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f_k(x) - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \right]$  et en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f_k(x) - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \right] = k \quad (\text{en multipliant l'expression par sa quantité conjuguée) et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

#### Exercice n° 4

Combien a-t-on de nombres entiers naturels à 3 chiffres qui sont inférieurs à  $10^p$ , dont la somme des chiffres est égale à 3 ? (on pourra discuter selon les valeurs de l'entier naturel  $p$ )

Notons  $x$ ,  $y$  et  $z$  les trois chiffres qui composent un entier strictement inférieur à  $10^p$ . Ce nombre s'écrit :  $n = 100x + 10y + z$ . Il faut pour que la somme soit inférieure à  $10^p$  et que  $x \leq 3; y \leq 3; z \leq 3$ .

Pour  $p=0$ ,  $10^0 = 1$  et il n'existe aucun entier inférieur à 1 et dont la somme des chiffres est égale à 3,

Pour  $p=1$   $10^1 = 10$  et  $3=003$  est le seul nombre, donc  $S_1 = \{3\}$

Pour  $p=2$   $10^2 = 100$  et pour un entier de la forme  $xyz$ , il faut  $x=0$  et  $y+z=3$ . D'où  $S_2 = \{03, 12, 21, 30\}$

Pour  $p \geq 2$ ,  $x$ ,  $y$  et  $z$  doivent vérifier : 
$$\begin{cases} 100x + 10y + z < 10^p \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

En faisant varier  $x$ , puis  $y$ , puis  $z$  de 0 à 3, on trouve :

$$S_p = \{3, 12, 21, 30, 102, 111, 120, 201, 210, 300\}$$

#### Exercice n° 5

On considère la fonction numérique  $f$  définie par:

$$f(x) = \sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}$$

- Déterminer le domaine de définition de  $f$ .  
Le domaine de définition de  $f$  est l'intervalle  $[2, +\infty[$
- Calculer  $(f(x))^2$  pour simplifier l'expression de  $f(x)$  et tracer le graphe de  $f$  dans un repère orthonormé.  

$$(f(x))^2 = 2((x-1) + |x-3|)$$
  
Puis 
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 2\sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$
- Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels  $(x, y)$  tels que  $y = f(x)$ , avec  $x$  inférieur ou égal à 10.  
Les couples d'entiers naturels  $(x, y)$  tels que  $y = f(x)$  sont  $(2, 2)$ ;  $(3, 2)$  et  $(6, 4)$ .
- Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[3, +\infty[$ . Montrer que  $g$  est une bijection de  $[3, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera. Montrer que la bijection réciproque  $g^{-1}$  de  $g$  est dérivable sur  $J$ .  
Comme la fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[3, +\infty[$ , elle est bijective sur cet intervalle. La fonction réciproque est dérivable et sa dérivée est égale à :  

$$(g^{-1})' = \frac{1}{f'}$$
- Déterminer la fonction  $g^{-1}$  et tracer son graphe dans le même repère que celui de  $f$ . Que peut-on dire ?  
On a  $g^{-1}(x) = \frac{x^2}{4} + 2$  et le graphe de  $g^{-1}$  est le symétrique du graphe de  $g$  par rapport à la première bissectrice.

### Exercice n° 6

- Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction  $f$  définie sur l'ensemble des nombres réels par :  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x+1}$   
On décompose la fonction sous la forme :  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x+1} = x - 1 + \frac{3}{x+1}$   
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = -1$ . La droite d'équation  $y = x - 1$  est donc une asymptote oblique et la droite  $x = -1$  une asymptote verticale.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2}{x+1} = 1 - \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 3}{(x+1)^2} = \frac{(x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3})}{(x+1)^2}$$

$x$	$-\infty$	$-1-\sqrt{3}$	$-1$	$-1$	$-1+\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-		-	+	
$f(x)$	$-\infty$			$-\infty$		$+\infty$

2. Calculer l'aire comprise entre l'axe  $ox$ , le graphe de  $f$  et les droites d'équation  $x=1$  et  $x=2$ .

$$\text{Soit } I = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(x - 1 + \frac{3}{x+1}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + 3 \operatorname{Ln}(x+1)\right]_1^2 = \frac{1}{2} + 3 \operatorname{Ln}\left(\frac{3}{2}\right)$$

3. Montrer que le graphe de  $f$  admet un centre de symétrie que l'on déterminera.  
Le point  $(-1, -2)$  est un centre de symétrie (intersection des deux asymptotes), en effet en posant  $X = x + 1$  et  $Y = y + 2$ , on obtient la fonction impaire :  $Y = X + \frac{3}{X}$

### Exercice n° 7

$$\text{Soit } I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx.$$

- Calculer  $I_1$ . On obtient  $I_1 = e^2 - 3$  (en intégrant par parties).
- Montrer que pour tout entier  $n$  strictement positif, on a :  $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$

$$0 \leq I_n \leq \int_0^2 \frac{1}{n!} 2^n e^x dx \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$$

- Trouver une relation de récurrence entre  $I_{n+1}$  et  $I_n$

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \text{ (intégration par parties)}$$

- Etudier la convergence de la suite  $(I_n)$  et calculer sa limite si elle existe.

La suite  $(I_n)$  est décroissante et minorée par zéro, et comme elle est majorée par  $\frac{2^n e^2}{(n)!}$  qui converge vers 0, elle converge vers 0.

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

**CORRIGE DE LA 2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**Exercice n° 1**

Soit  $f_\lambda$  la fonction définie sur  $R$  par :  $f_\lambda(x) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda x}}$ , où  $\lambda$  est un paramètre réel strictement positif.

1. Etudier les variations de  $f_\lambda$  et donner l'allure de son graphe.

La fonction  $f_\lambda$  est définie sur  $R$ , et sa dérivée est égale à  $f'_\lambda(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{(1 + e^{-\lambda x})^2} > 0$ .

La fonction est donc strictement croissante sur  $R$  à valeurs dans  $]0,1[$ . Elle admet l'axe  $Ox$  et la droite  $y=1$  comme asymptotes horizontales.

2. Montrer que  $f_\lambda$  admet un centre de symétrie.

Le point  $A(0, 1/2)$  est un centre de symétrie. Il suffit de poser  $Y = y - \frac{1}{2}$  pour obtenir

la fonction impaire  $Y = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{2(1 + e^{-\lambda x})}$

3. Montrer que l'équation  $f_\lambda(x) = x$  admet une unique solution réelle positive que l'on notera  $x_\lambda$

Posons  $h_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$ . On a  $h_\lambda(0) = 1/2; h_\lambda(1) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda}} - 1 < 0$ ,  $h_\lambda$  est strictement décroissante et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution  $x_\lambda \in ]0, 1[$  à l'équation :  $h_\lambda(x) = 0$

4. Etudier la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et la relation de récurrence :  $u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$

Comme la fonction  $f_\lambda$  est continue, si la suite  $(u_n)$  admet une limite  $l$ , alors elle vérifie  $l = f_\lambda(l)$  et donc  $l = x_\lambda$ . Il reste à vérifier que la suite est convergente.

En effet, on a  $0 < u_n < 1$  et elle est décroissante.

5. Calculer  $I_n = \int_{-n}^0 f_\lambda(x) dx$  et en déduire  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$

$$I_n = \int_{-n}^0 f_\lambda(x) dx = \int_{-n}^0 \frac{e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda x}} dx = \left[ \frac{1}{\lambda} \text{Ln}(1 + e^{\lambda x}) \right]_{-n}^0 = \frac{1}{\lambda} \text{Ln}2 - \frac{1}{\lambda} \text{Ln}(1 + e^{-\lambda n})$$

Et  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{\lambda} \text{Ln}2$

6. Calculer  $J_n = \int_0^n (1 - f_\lambda(x)) dx$  et en déduire  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n$

En posant  $u = -x$ , on obtient :  $J_n = I_n$  et donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \frac{1}{\lambda} \ln 2$

### Exercice n° 2

On considère la famille de courbes  $C_m$  dont l'équation par rapport à un repère orthonormé est :  $x^2 + 4mx - 2(m+1)y = 0$ , où  $m$  est un paramètre réel.

1. Quelle est la nature de la courbe  $C_m$  selon la valeur du paramètre  $m$  ?

Si  $m = -1$ , on obtient deux droites verticales :  $x = 0, x = 4$

Si  $m > -1$ , on obtient une parabole convexe d'équation :  $y = \frac{x^2 + 4mx}{2(1+m)}$

Si  $m < -1$ , on obtient une parabole concave d'équation :  $y = \frac{x^2 + 4mx}{2(1+m)}$

2. Montrer que les courbes  $C_m$  passent par des points fixes que l'on précisera (sauf pour une valeur particulière de  $m$ ).

De l'équation précédente, on obtient :  $2y - x^2 = m(2y - 4x)$ , soit le système :

$$\begin{cases} 2y - x^2 = 0 \\ 2y - 4x = 0 \end{cases}, \text{ d'où les deux points fixes } (0,0) \text{ et } (4,8) \text{ (pour } m \neq -1)$$

3. Calculer l'aire comprise entre le graphe de  $C_m$  ( $m < -1$ ), l'axe des abscisses et les droites  $x=0$  et  $x=4$ .

On doit vérifier le signe de la fonction sur ce domaine (pour  $m < -1$ )

$y = \frac{x^2 + 4mx}{2(1+m)}$  et  $y' = \frac{2x + 4m}{2(1+m)} = \frac{x + 2m}{1+m}$ . On vérifie que la fonction est positive

sur le domaine d'intégration, d'où :

$$\text{Aire} = \int_0^4 \frac{x^2 + 4mx}{2(1+m)} dx = \frac{1}{2(1+m)} \left[ \frac{x^3}{3} + 2mx^2 \right]_0^4 = \frac{1}{2(1+m)} \left( \frac{64}{3} + 32m \right) > 0$$

### Exercice n° 3

On considère la fonction  $f$  définie sur  $R$  par  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  et pour chaque entier naturel  $n$  ( $n > 1$ ),

la fonction  $f_n$  définie par :  $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x}$ .

1. Etudier les variations de  $f_n$  selon les valeurs de  $n$ . La courbe représentative de  $f_n$  est désignée par  $C_n$

On obtient :  $f'_n(x) = \frac{x^{n-1}(n+nx-x)}{(1+x)^2}$  et cette dérivée s'annule pour  $x=0$  et  $x = \frac{n}{1-n}$

Si  $n$  est pair, le signe de la dérivée est celui de  $(n+nx-x)$ . D'autre part :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1} f_n(x) = \infty$ . La droite  $x = -1$  est une asymptote verticale.



$x$	$-\infty$	$n/(1-n)$	$-1$	$-1$	$0$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+		-	-	+	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\rightarrow$	$\rightarrow -\infty$	$+\infty$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow +\infty$

Si  $n$  est impair, on obtient le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$n/(1-n)$	$-1$	$-1$	$0$	$+\infty$
$f'_n(x)$	-		+	+	+	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\rightarrow$	$\rightarrow +\infty$	$-\infty$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow +\infty$

2. Tracer dans un repère orthonormé les courbes  $C_2$  et  $C_3$ . On précisera la position relative des deux courbes.

Pour tracer ces deux courbes, il suffit de reprendre les tableaux précédents.

Pour  $C_2$ ,  $f_2(-2) = -4$  et pour  $C_3$ ,  $f_3(-3/2) = 27/4$

La position des deux courbes est donnée par le signe de  $\frac{x^3}{1+x} - \frac{x^2}{1+x} = \frac{x^2(x-1)}{x+1}$

Pour  $-1 < x < 1$ , la courbe  $C_3$  est en dessous de  $C_2$ , sinon c'est l'inverse.

3. Etant donné un réel  $x$ , on note  $S_n(x)$  la somme des  $n$  premiers termes de la suite géométrique de raison  $(-x)$  et de premier terme 1. Exprimer  $S_n(x)$  en fonction de  $f(x)$  et de  $f_n(x)$ .

On a :  $S_n(x) = 1 - x + x^2 + \dots + (-x)^{n-1}$  et

$x S_n(x) = x - x^2 + \dots + (-x)^n$

On vérifie alors aisément que  $S_n(x) = f(x) - (-1)^n f_n(x)$

4. Pour  $|x| < 1$ , déterminer la limite de  $S_n(x)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Qu'en est-il pour  $x=1$  ?

Pour  $|x| < 1$ ,  $\lim x^n = 0$  et donc  $\lim S_n(x) = f(x)$  et pour  $x=1$ , la suite n'a pas de limite.

5. Pour  $x$  réel positif ou nul, on pose :  $a_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$ . Montrer que l'expression

suivante est une constante :  $a_n(x) + (-1)^n \int_0^x f_n(t) dt - Ln(1+x)$ , où  $Ln$  désigne le logarithme népérien.

On a (question 3) :  $\int_0^x (1-t+t^2+\dots+(-1)^{n-1}t^{n-1}) dt = \int_0^x f(t) dt - (-1)^n \int_0^x f_n(t) dt$ , soit

$a_n(x) = Ln(1+x) - (-1)^n \int_0^x f_n(t) dt$  et  $a_n(x) - Ln(1+x) + (-1)^n \int_0^x f_n(t) dt = 0$

6. Comparer  $a_n(x)$  et  $Ln(1+x)$

La fonction  $f_n$  étant positive entre 0 et  $x$ , si  $n$  est pair  $a_n(x) \leq Ln(1+x)$  et si  $n$  est impair,  $a_n(x) \geq Ln(1+x)$

7. Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(1)$

$$\text{On a : } |a_n(x) - \ln(1+x)| \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Pour  $0 \leq x \leq 1$ ,  $\lim_n a_n(x) = \ln(1+x)$  et  $\lim_n a_n(1) = \ln(2)$

#### Exercice n° 4

1. Déterminer les nombres réels  $a, b, c$  et  $d$  vérifiant (pour tout nombre réel  $x$ ) :

$$\frac{2x^2 + 2x + 5}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{(x+2)^2}$$

Par identification des polynômes ou en utilisant les pôles des fractions rationnelles, on

obtient : 
$$\frac{2x^2 + 2x + 5}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$$

2. Calculer  $\int_{-1}^0 \frac{2x^2 + 2x + 5}{(x-1)^2(x+2)^2} dx$

$$\int_{-1}^0 \frac{2x^2 + 2x + 5}{(x-1)^2(x+2)^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{(x+2)^2} dx = \left[ -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right]_{-1}^0 = 1$$

#### Exercice n° 5

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ , où  $|x|$  désigne la valeur absolue du nombre réel  $x$ .

1. Etudier la dérivabilité de  $f$  à l'origine.

On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+|x|} = 1 = f'(0)$ , donc  $f$  est dérivable en 0.

2. Etudier les variations de  $f$  et tracer son graphe.

La fonction  $f$  est impaire et son graphe est donc symétrique par rapport à l'origine. On peut donc se restreindre aux nombres réels positifs.

Sa dérivée est  $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$  et  $f$  est donc strictement croissante de  $\mathbb{R}^+$  sur  $[0,1[$  ;

Son graphe admet la droite d'équation  $y = 1$  comme asymptote horizontale.

3. Calculer  $\int_0^1 f(x) dx$  et  $\int_{-1}^1 f(x) dx$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = 1 - \ln 2 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \quad (\text{car } f \text{ est impaire})$$

## Exercice n° 6

Etudier la nature des suites suivantes et déterminer leur limite éventuelle :

1.  $u_n = \frac{\sin(n) + 3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$ , on a :  $|u_n| \leq \frac{4}{\sqrt{n}}$  et la suite tend vers 0

2.  $v_n = \frac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$ , on a  $v_n = \frac{2n(1 + (-1)^n / 2n)}{5n(1 + (-1)^{n+1} / 5n)}$  et la suite tend vers 2/5