AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

1. La fonction *f* est continue en 0 si et seulement si *f* admet une limite à droite en 0, une limite à gauche en 0, et si ces deux limitent coïncident.
   $\lim_{x \to 0^-} f(x) = b$
   Un développement limité de la fonction *f* en 0 est $f(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ = - $\frac{1}{2} + o(1)$, donc
   $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\frac{1}{2}$
   La fonction *f* est donc continue en 0 si et seulement si *b* = -1/2 et *a* un réel quelconque

2. Pour que la fonction *f* soit dérivable, il faut déjà qu'elle soit continue. D'après la question précédente, il est nécessaire que *b* = -1/2.
   Pour la dérivabilité, il faut étudier la continuité de la fonction $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ en 0. La limite à gauche de la fonction *g* est égale à *a.*
   La limite à droite de la fonction *g* est égale, en effectuant un développement limité, à 1/3
   La fonction *f* est donc dérivable en 0 si et seulement si *b* = -1/2 et *a* = 1/3

3. Pour que la fonction *f* soit de classe C^1, il faut qu'elle soit dérivable en 0. D'après la question précédente, il est donc nécessaire que *b* = -1/2 et *a* = 1/3. Il faut en outre vérifier que f' est continue en 0.
   $$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - x - 2\ln(1+x) + 2x}{x^3}$$
   En faisant un développement limité de cette fonction, on obtient une limite en 0 égale à 1/3, ce qui est aussi le résultat obtenu à la question précédente. Ceci montre bien la continuité de la fonction f'

Exercice 2

1. On a $v_3 = 3v_1 - v_2$. Ainsi, *F* est engendré par v_1 et v_2. Comme ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de *F*. C'est donc une base de *F*.

2. On a $w_3 = 5w_1 - 2w_2$. Ainsi*, G* est engendré par w_1 et w_2. Comme ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de *G*. C'est donc une base de *G*.

3. Comme $v_1 - w_1 = v_2 - w_2$, la famille composée des 4 vecteurs est liée. On sait que ces 4 vecteurs forment une famille génératrice de *F + G.* Comme w_2 est une combinaison linéaire des 3 autres, ces 4 vecteurs ne forment pas une base de *F + G*. En revanche, on démontre facilement que les 3 vecteurs (v_1, v_2, w_1) forment une famille libre. C'est donc une base de *F + G.*

4. Une famille génératrice de *E* est ((1,0,0,-4),(0,1,0,2),(0,0,1,0)). On démontre facilement que ces 3 vecteurs forment une famille libre. C'est donc une base de *E*.

5. On remarque que dim (F + G) = dim E = 3. Pour montrer que $F + G = E$, il suffit de montrer que $F + G$ est inclus dans E. Comme $F + G$ est engendré par (v_1, v_2, w_1), il suffit de démontrer que ces 3 vecteurs sont éléments de E. Cette démonstration est immédiate et non faite ici.
La somme n'est pas directe car on devrait avoir dim E = dim F + dim G. Or, ce n'est pas le cas ($3 \neq 2 + 2$). Comme dim ($F + G$) = dim F + dim G – dim $(F \cap G)$, on obtient dim $(F \cap G) = 1$.

Exercice 3

1. On dérive f : $f'(x) = 1 - 2x$, fonction qui s'annule en $1/2$, positive sur $]-\infty, 1/2]$, négative sur $[1/2, +\infty[$. Ainsi f est croissante sur $]-\infty, 1/2]$, décroissante sur $[1/2, +\infty[$, et $f(1/2) = 1/4$. On obtient une parabole concave.

2. Démonstration par récurrence : on remarque que le résultat est vrai pour n = 0. Il est aussi vrai pour n = 1. En effet si $u_0 \in]0,1[$, d'après l'étude des variations de f, $u_1 = f(u_0)$ est dans l'intervalle $]0,1/4]$. Supposons le résultat vrai au rang n , et prouvons le au rang n + 1.

   Puisque $u_n \in \left]0, \frac{1}{n+1}\right] \subset]0,1/2]$ et que la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle, on obtient :

$$0 < u_n < \frac{1}{n+1} \to f(0) = 0 < f(u_n) = u_{n+1} < f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

   Pour conclure on remarque que :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{1}{(n+1)^2(n+2)} < 0$$

   Ainsi on a bien :

$$0 < u_n < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n+2}$$

3. On calcule $v_{n+1} - v_n$ et on trouve :

$$v_{n+1} - v_n = (n+1)u_{n+1} - nu_n$$

$$= u_n(1 - (n+1)u_n).$$

   Or comme $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$: on a $u_n > 0$ et $1 - (n+1)u_n > 0$, et donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$: la suite (v_n) est donc croissante.

4. Puisque v_n est croissante, il suffit de prouver qu'elle est majorée pour démontrer qu'elle est convergente. Mais, en utilisant la question précédente, $v_n = nu_n \leq \frac{n}{n+1}$. Ainsi, $v_n \leq 1$ et la suite (v_n) est donc convergente vers une limite notée l. De plus, pour tout $n > 1$, on a $v_1 \leq v_n \leq 1$. Par passage à la limite, on en déduit que $v_1 \leq l \leq 1$. Il suffit enfin de remarquer que $v_1 > 0$.

5. On va exprimer w_n en fonction de v_n et de u_n puisqu'on sait que ces deux suites convergent. On a :

$$w_n = n(v_{n+1} - v_n) = nu_n(1 - (n+1)u_n)$$

   D'après le calcul fait à la question précédente, soit :

$$w_n = v_n(1 - nu_n - u_n) = v_n(1 - v_n - u_n).$$

Puisque la suite (u_n) converge vers 0, que la suite (v_n) converge vers *l*, on en déduit, par les opérations usuelles sur les suites convergentes, que la suite (w_n) est convergente vers $l(1-l-0) = l(1-l)$.

6. Pour $n \geq n_0$ on écrit :

$$t_{2n} - t_n = (t_{2n} - t_{2n-1}) + (t_{2n-1} - t_{2n-2}) + \cdots + (t_{n+1} - t_n)$$

$$\geq \frac{a}{2n-1} + \frac{a}{2n-2} + \cdots + \frac{a}{n}$$
$$\geq \frac{a}{2n} + \frac{a}{2n} + \cdots + \frac{a}{2n}$$
$$\geq \frac{a}{2}$$

Si la suite (t_n) était convergente de limite r, la suite (t_{2n}) serait convergente de même limite et on aurait $0 = r - r \geq \frac{a}{2} > 0$ ce qui est absurde donc (t_n) est divergente.

7. Supposons $l \neq 1$. Alors $l(1-l)$ est strictement positif (puisque $l \in]0,1]$). Posons $a = l(1-l)/2$ de sorte que $a < l(1-l)$. Puisque la suite (w_n) converge vers $l(1-l) > a > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on a :

$$w_n > a \rightarrow v_{n+1} - v_n \geq \frac{a}{n}$$

Ainsi par la question précédente, on sait que (v_n) diverge. Or, ce n'est pas le cas. L'hypothèse de départ est donc fausse et la suite (v_n) converge vers 1.

Exercice 4

1. Le polynôme caractéristique est (2-*x*)(4-*x*)^{2}. 2 et 4 sont donc les valeurs propres. Pour la valeur propre 4, il faut s'assurer que le sous-espace propre associé soit bien de dimension 2 pour dire que la matrice est diagonalisable.
Pour la valeur propre 2, le sous-espace propre est engendré par le vecteur (1,-2,1)
Pour la valeur propre 4, le sous-espace propre est engendré par les vecteurs (0,1,0) et (1,0,-1). Ils forment une famille libre donc une base de ce sous-espace.

La matrice *A* est donc bien diagonalisable et on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2. On sait que $A^n = PD^nP^{-1}$.

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \ et \ P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n + 4^n & 0 & 2^n - 4^n \\ 2(4^n - 2^n) & 2.4^n & 2(4^n - 2^n) \\ 2^n - 4^n & 0 & 2^n + 4^n \end{pmatrix}$$

Exercice 5

1. On note A_i l'évènement « l'erreur numéro 1 n'est pas corrigée à l'issue de la *i*-ème relecture ». Les évènements A_i sont indépendants et $P(A_i) = 2/3$. On s'intéresse à la probabilité de l'évènement $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$.
$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2}{3} = 2^n/3^n$

2. On note B_j l'évènement « l'erreur numéro j n'est pas corrigée à l'issue de la *n*-ème relecture ». D'après la question précédente, on $P(B_j) = 2^n/3^n$ pour j = 1,2,3,4. Le livre est entièrement corrigé après la *n*-ème relecture si l'évènement $\bigcap_{j=1}^{4} \overline{B_j}$ est réalisé. Les évènements B_j étant

indépendants, le livre est entièrement corrigé après *n* relectures avec une probabilité valant $= \prod_{j=1}^{4}(1-\frac{2^n}{3^n}) = (1-\frac{2^n}{3^n})^4$

3. La probabilité calculée à la question précédente est supérieure à 0,9 si et seulement si $n \geq \frac{\ln(1-0{,}9^{(\frac{1}{4})})}{\ln(\frac{2}{3})}$, ce qui donne $n \geq 10$

Exercice 6

On note *B* l'évènement « l'étudiant donne la bonne réponse » et *C* l'évènement « l'étudiant connait la bonne réponse ». On cherche $P_B(C)$.

On connait $P(C) = p$, $P(B \text{ sachant } C) = 1$, $P(B \text{ sachant } \overline{C}) = 1/m$

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(B) = P(C)P(B\ sachant\ C) + P(\overline{C})P(B\ sachant\ \overline{C}) = \frac{(m-1)p+1}{m}$$

D'après la formule de Bayes, la probabilité cherchée est :

$$P(C\ sachant\ B) = \frac{P(B\ sachant\ C)P(C)}{P(B)} = \frac{mp}{1+(m-1)p}$$

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

Dans cette épreuve, une partie des calculs étaient à remettre dans le tableau 3 joint en annexe à l'énoncé. Ce tableau récapitulatif rempli est ci-dessous :

Synthèse	**Partie I**	**Partie II**	**Partie III**
	Question 1	**Question 4**	**Question 1**
		An 2014	**An 2014**
	Tx Croissance (en %)	**PIB (en milliards de $)**	**PIB/Hab (en $)**
Afrique Australe	2,38%	360,67	5 817
Afrique Centrale	2,77%	147,93	1 003
Afrique de l'Est	2,85%	188,69	493
Afrique du Nord	2,51%	466,19	2 090
Afrique de l'Ouest	2,58%	294,15	866
Total Afrique	2,66%	1 457,62	1 262

Partie I

1) Pour calculer les chiffres de la première colonne, il fallait utiliser la formule :

Population 2000 = (1+taux de croissance)$^{2000-1960}$ x Population 1960

Les chiffres de population des années 1960 et 2000 sont donnés dans le tableau 1 de l'énoncé, chiffres exprimés en millions

2-a) Pour calculer le chiffre demandé, il fallait utiliser la formule :

Population 2014 = (1+taux de croissance précédemment trouvé pour la zone Afrique du Nord)$^{2014-2000}$ x Population 2000 = 292,48

2-b) L'écart est très important : 223,01 constaté contre 292,48 estimé. Trois effets peuvent intervenir sur les chiffres de population : une baisse de la natalité, une hausse de la mortalité, l'effet migratoire

2-c) Pas de corrigé type pour cette question. Par exemple, on aurait pu constater que le taux moyen d'évolution de la population sur cette zone entre 2000 et 2014 est de 1,78%, en baisse nette par rapport à celui calculé à la question 1 (2,51%). Si on prend ce taux, on obtient une population en 2050 = population 2014 x $(1+0{,}0178)^{2050-2014}$ = 420,89 millions d'habitants

3) L'évolution constatée entre 2000 et 2014 est de 2,61% par an. Il faut résoudre l'équation suivante : 2 milliards = population 2014 x $(1+0{,}0261)^n$. On trouve n = 21,31, soit 22 ans. C'est donc en 2036 que la population africaine devrait dépasser les 2 milliards d'individus.

Partie II

1) On calcule le PIB et le nombre d'habitants de la zone « Afrique de l'Est » en ne prenant pas en compte la Somalie et le Soudan du sud. On obtient 172,07 milliards de $ pour une population de 360,15 millions d'habitants, soit un PIB par habitant de 478 $.
   Pour calculer le PIB de la Somalie, on multiplie ce chiffre à la population 2014, soit 478 x 10,52 = 5,03 milliards de $.
2) Le PIB du Soudan est de 38,27 milliards de $ en 2014 pour une population de 39,35 millions d'habitants, soit un PIB par habitant de 973 $.
   Pour calculer le PIB du Soudan du Sud, on multiplie ce chiffre à la population 2014, soit 973 x 11,91 = 11,59 milliards de $.
3) L'évolution moyenne annuelle constatée entre 2010 et 2013 est de 2,20%. Pour calculer le PIB de la Tunisie, on part du PIB de l'année 2013 que l'on fait évoluer de ce taux, soit 43,32 x (1+0,022) = 44,27 milliards de $.
4) Le PIB de la zone « Afrique de l'Est » est donc la somme de 172,07 milliards de $ + le résultat de la question 1 + le résultat de la question 2 = 188,69 milliards de $.
   Le PIB de la zone « Afrique du Nord » est donc la somme de 421,92 milliards de $ + le résultat de la question 3 = 466,19 milliard de $.
   Le PIB de la zone « Afrique » est de 1457,62 milliards de $.

Partie III

1) Pour calculer les chiffres de la troisième colonne du tableau de synthèse, il fallait utiliser la formule :

Indicateur = PIB 2014 / Population 2014. Il fallait l'exprimer en $.

2) En ce qui concerne le commentaire, il n'y a pas de corrigé type. On pouvait observer qu'il y avait des disparités importantes entre les zones avec un écart de de 1 à 12 et que la zone « Afrique Australe » était de loin la plus « riche ».