AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

a) On factorise au numérateur et au dénominateur par le terme dominant et on obtient :

$u_n = \frac{2}{5}\frac{1+\frac{(-1)^n}{(2n)}}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{(5n)}}$. Le second terme tend vers 1, donc la suite converge vers 2/5.

b) Si *a*=*b*, les termes de la suite sont nuls et la suite converge vers 0.

Si *a*<*b*, on écrit $u_n = \frac{-1+(\frac{a}{b})^n}{1+(\frac{a}{b})^n}$. Comme $(\frac{a}{b})^n$ tend vers 0, la suite converge vers -1.

Si *a*>*b*, on écrit $u_n = \frac{1-(\frac{b}{a})^n}{1+(\frac{b}{a})^n}$. Comme $(\frac{b}{a})^n$ tend vers 0, la suite converge vers 1.

c) La suite peut aussi s'écrire comme $u_n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{2x}{(n+x)})}$. Or, comme $\frac{-2x}{(n+x)}$ tend vers 0, on peut utiliser le développement limité de ln (1 + a) au voisinage de zéro (qui est a). Ce qui donne que la suite converge vers e^{-2x}.

Exercice 2

a) Les vecteurs (2,1,0) et (-1,0,1) engendrent *F* et sont linéairement indépendants. C'est donc une base de *F* et dim *F* = 2.

Les vecteurs (1,2,0) et (0,2,1) engendrent *G* et sont linéairement indépendants. C'est donc une base de *G* et dim *G* = 2.

b) Le vecteur (-1,0,1) engendre $F \cap G$. Une famille constituée d'un vecteur non nul est libre, donc c'est une base de $F \cap G$. Dim $F \cap G$= 1.

c) L'espace vectoriel engendré par la réunion des deux bases est *F* + *G*. On doit démontrer que *F* + *G* = $\mathbb{R}^3$. Pour cela, il suffit de démontrer que dim (*F* + *G*) = 3. On sait que :

dim (*F* + *G*) = dim *F* + dim *G* – dim ($F \cap G$). On en conclut bien que dim (*F* + *G*) = 3.

d) *F* et *G* ne sont pas supplémentaires car $F \cap G$ n'est pas l'ensemble vide.

Exercice 3

Écrivons l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse a. Il s'agit de :

$y - a^2 = 2a(x - a)$, soit $y = 2ax - a^2$

De même, l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = {}^1/_x$ au point d'abscisse b s'écrit :

$y - \frac{1}{b} = \frac{-1}{b^2}(x - b)$, soit $y = \frac{-1}{b^2}x + \frac{2}{b}$

Pour que les deux tangentes coïncident, il faut que a et b vérifient $2a = \frac{-1}{b^2}$ et $-a^2 = \frac{2}{b}$

On en déduit que $a = 0$ ou $a = -2$. La solution $a = 0$ est à exclure car on ne peut déterminer b dans ce cas. Pour $a = -2$, on obtient $b = -1/2$. On vérifie facilement que les tangentes en a et en b coïncident.

Exercice 4

a)$g'(x) = (x-1)\mathrm{e}^x + 1$; $g''(x) = x\mathrm{e}^x$

Comme la fonction g'' est positive sur le domaine de définition et que $g'(0) = 0$, g' est croissante et positive sur le domaine de définition. Donc g est croissante et comme $g(0) = 0$, g est positive sur le domaine de définition.

b) La fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$ avec $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$

Au point 0, on va vérifier que la fonction f est continue. C'est évident en utilisant le développement limité de la fonction exponentielle au voisinage de zéro :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Le développement de la dérivée de f en zéro est -1/2. On en déduit que f est de classe C^1 sur le domaine de définition et que $f'(0) = -1/2$.

c) Le calcul n'est pas détaillé ici. En utilisant la question a) et les propriétés de la fonction exponentielle, on en déduit que la fonction f'' est positive sur le domaine de définition. En conséquence, la fonction f' est croissante. On sait que $f'(0) = -1/2$. La limite de f' en l'infini se comporte comme $-x/\mathrm{e}^x$, donc elle est nulle. On en déduit que $f'(x)$ est compris entre -1/2 et 0 sur le domaine de définition. Ce qui est le résultat recherché.

d) Par l'inégalité des accroissements finis et en utilisant le résultat de la question précédente, on sait que $|f(x) - f(y)| \leqslant 1/2\,|x - y|$ pour tout x et y réels positifs. En appliquant cette inégalité pour les termes de la suite u_n et en utilisant le fait que $f(\ln 2) = \ln 2$, on obtient le résultat demandé par récurrence.

Exercice 5

a) A = {2, 4, 6, 8, 10, 12}, B = {3, 6, 9, 12}, A ∩ B = {6, 12}

p(A) = 1/2 ; p(B) = 1/3 ; p(A ∩ B) = 1/6 = p(A)p(B).

A et B sont donc indépendants.

b) A = {2, 4, 6, 8, 10, 12}, B = {3, 6, 9, 12}, A ∩ B = {6, 12}

p(A) = 6/13 ; p(B) = 4/13 ; p(A ∩ B) = 2/13 ≠ p(A)p(B).

A et B ne sont pas indépendants.

École Nationale Supérieure de Statistique et d'Économie Appliquée
ENSEA-Abidjan

AVRIL 2017
CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES
ITS Voie B Option Économie

Composition d'économie : CORRIGÉ

Sujet 1

Que peuvent faire les banques centrales lorsque l'inflation est faible et le chômage élevé ?

`Exemples d'éléments de réponse pour la dissertation à partir de notions/auteurs présents dans le programme du concours :`

Depuis la crise financière qui a débuté en août 2007, la plupart des pays développés occidentaux n'ont retrouvé ni leur niveau de croissance, ni celui d'emploi, d'avant-crise. Pour ce qui est du Japon, cette situation de stagnation dure depuis le krach financier de 1990. On peut s'interroger sur ce que la politique monétaire peut faire pour améliorer une situation de longue stagnation économique. Avant la crise, le ciblage d'inflation était la norme (règle de Taylor). Il s'est heurté à la trappe à liquidité. Des politiques non-conventionnelles ont été tentées.

1. *Selon les monétaristes et les nouveaux classiques, la politique monétaire n'a pas d'effets positifs sur les performances de l'économie réelle.*
   — *Vision dichotomique de l'économie : la monnaie est neutre, la sphère réelle est indépendante de la sphère monétaire. Friedman : "comme si la monnaie tombait d'un hélicoptère"*
   — *Théorie quantitative de la monnaie : M est exogène, n'influence que P. La détermination du PIB et du chômage est totalement indépendante.*
   — *Par conséquent, la politique monétaire ne peut pas influencer le PIB et l'emploi. Si l'inflation est faible et le chômage élevé, ce n'est pas le problème de la politique monétaire. Les banques centrales doivent garder le cap : être indépendantes, cibler une inflation faible.*
2. *Selon les keynésiens, la politique monétaire a un rôle à jouer dans le pilotage de l'économie réelle*
   — *Pour Keynes, les agents économiques demandent de la monnaie pour elle-même. Donc pas de dichotomie. Illustration : modèle IS-LM (Keynes vu par Hicks) : la banque centrale détermine M, mais la politique monétaire a des effets sur le PIB. Une politique expansionniste est envisageable.*
   — *Pour certains nouveaux keynésiens et les post-Keynésiens, la monnaie est endogène, essentiellement créée par le crédit. Donc, la banque centrale ne définit pas M mais le taux d'intérêt directeur. Pour faire face à la stagnation, les taux d'intérêt négatifs sont une possibilité, qui est tentée depuis 2015. Si ces taux négatifs n'ont pas eu d'effets catastrophiques, l'effet sur l'économie réelle n'est pas radical.*
   — *Si les politiques conventionnelles échouent, c'est peut-être parce que le taux d'intérêt n'est pas le seul déterminant de la création monétaire. En particulier, la demande de crédit est*

fortement affectée par le pessimisme des firmes et des ménages. Ancrer les anticipations sur le fait que les taux vont rester bas ne suffit pas. La BCE a envisagé "l'hélicoptère-monnaie" (distribuer des euros directement).

3. *Les politiques non-conventionnelles n'ont pas enrayé la crise non plus*
   — *Si crise majeure, trappe à liquidité (Keynes, Krugman). La politique conventionnelle (règle de Taylor) devient impuissante. Donc la banque centrale doit tout faire pour éviter que cela se produise. Par exemple, cible d'inflation non-nulle afin d'avoir une marge de manoeuvre. Blanchard (FMI) reconnait que la cible de 2% était trop basse. Lors de la prochaine période de croissance, il faudra cibler plus haut (par exemple 4%).*
   — *Depuis le début de cette crise majeure, politiques monétaires non-conventionnelles : quantitative easing, qualitative easing, credit easing. Le but est de relancer le crédit (donc l'investissement et la demande globale) lorsque le canal du taux d'intérêt est impuissant. Les effets : ces mesures ont limité le krach, mais pas arrêté la stagnation durable.*
   — *Les banques centrales peuvent définir des politiques macro et microprudentielles pour éviter la prochaine crise majeure.*

Conclusion : Les politiques monétaires, conventionnelles comme non-conventionnelles, qui ont été tentées suite à la crise, ont failli à relever le niveau de l'emploi et de l'inflation. Si la politique monétaire peut prévenir (ou favoriser) la survenue d'un krach, les politiques tentées jusqu'à aujourd'hui se sont révélées insuffisantes pour relancer une dynamique de croissance. Le "Quantitative Easing for the people" (hélicoptère, distribution d'euros aux ménages) ou l'annulation de dettes du secteur privé (à la Richard Koo, Steve Keen, ou encore David Graeber) sont des options radicales non encore explorées.

Sujet 2

1. Exercice de microéconomie (7 points)

Partie A

Alice et Bob jouent à un jeu où ils peuvent choisir de se déplacer vers le haut ou vers le bas. Leurs gains dépendent du côté vers lequel ils vont se déplacer, ainsi que du côté où va se déplacer leur partenaire. Ils ne peuvent pas communiquer avant de jouer, donc ils décident de manière indépendante. Voici la matrice des gains. Dans chaque couple de valeurs, le gain de Bob est à gauche, et le gain d'Alice à droite.

		Alice	
		haut	bas
Bob	haut	1 ; 2	2 ; 1
	bas	2 ; 3	3 ; 2

1. Où va aller Alice ?
   Alice considère ses gains en fonction du choix de Bob. Si Bob va en haut, Alice a intérêt à aller en haut ($2 > 1$)*. Si Bob va en bas, Alice a intérêt à aller en haut aussi* ($3 > 2$)*. Donc Alice va se déplacer vers le haut.*
2. Où va aller Bob ?
   Si Alice va vers le haut, Bob a intérêt à se déplacer vers le bas ($2 > 1$)*. Si Alice va vers le bas, Bob a aussi intérêt à aller vers le bas* ($3 > 2$)*. Donc Bob va aller vers le bas.*
3. Quel est l'équilibre de Nash et les gains correspondants ?
   Alice est en haut et Bob est en bas. Alice gagne 3 et Bob gagne 2.

Partie B

Une consommatrice a 200$ à la période t. Elle va gagner 1000$ à la période $t+1$. Elle se demande combien consommer et combien emprunter à la période t. Sa fonction d'utilité est $U = U(C_t, C_{t+1}) = \sqrt{C_t}\sqrt{C_{t+1}}$. Le taux d'intérêt réel est $r = 10\%$. Dans cette partie de l'exercice, vous arrondirez les résultats à l'unité la plus proche.

1. Exprimez sa contrainte budgétaire intertemporelle. Puis représentez-la sur un graphique avec C_t en abscisses et C_{t+1} en ordonnées
   La contrainte s'écrit :
   $$C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r} = 200 + \frac{1000}{1,1} \tag{1}$$
2. Expliquez à quoi correspondent les points (0,1220), (1109,0) et (200, 1000).
   Respectivement : le cas où elle ne consomme rien à la période t et place tout. Le cas où elle consomme tout à la période t et emprunte le maximum qu'elle peut. Le cas où elle consomme son revenu t à la période t, et son revenu $t+1$ à la date $t+1$.
3. Représentez graphiquement une baisse hypothétique du taux d'intérêt
   La contrainte budgétaire pivote autour du point (200, 1000).
4. On en reste au cas où $r = 10\%$. Calculez combien elle va dépenser et emprunter à la période t. Détaillez les calculs et/ou les étapes du raisonnement.

La consommatrice veut maximiser son utilité sur les deux périodes $U(C_t, C_{t+1})$ *sous la contrainte* $C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r} = 200 + \frac{1000}{1,1}$.
On peut ramener ce programme d'optimisation au choix d'une seule variable : E_1*, la quantité empruntée à la période 1.*
En effet, $C_1 = R_1 + E_1$ *et* $C_2 = R_2 - (1+r)E_1$*. Or, toutes ces variables sont connues à l'exception de* E_1*.*
Il suffit donc de vérifier que $\forall E_1 < 909$ *(la quantité maximale empruntée) on a* $\frac{\partial^2 U}{\partial E_1^2} < 0$*. C'est le cas. Ensuite, on cherche* E_1^* *tel que* $\frac{\partial U}{\partial E_1^*} = 0$
Par conséquent, la consommatrice va emprunter 381\$ à la période t *et les rembourser à la période* $t+1$*. Elle va donc consommer 581\$ à la période* t*.*

2. Exercice de macroéconomie (7 points)

On considère une économie ouverte. Y est le PIB, i le taux d'intérêt, e est le taux de change à l'incertain. Pour simplifier, on suppose les prix fixés et égaux à 1 (ainsi, le PIB nominal est égal au PIB réel, et la demande nominale de monnaie est égale à la demande réelle de monnaie).

La consommation s'écrit $C = 0,8Y + 10$
L'investissement est $I = 800 - 600i$
La demande de monnaie est $L_d = 2Y - 400i$
L'offre de monnaie est $L_o = 2800$
Les importations sont $M = 0,2Y$
Les exportations sont $X = 240e$
Enfin, le solde des mouvements de capitaux est $K = 900i - 500$

1. Écrivez l'équation IS.
   C'est l'équation qui assure l'égalité $I = S$ *c'est à dire* $I = Y - C$
   $$IS : 800 - 600i = 0,2Y - 10 \Leftrightarrow Y = 4050 - 3000i \qquad (2)$$
2. Écrivez l'équation LM.
   $$LM : L_d = L_o \Leftrightarrow Y = 1400 + 200i \qquad (3)$$
3. Pourquoi les importations dépendent-elles du revenu national, et les exportations du taux de change à l'incertain ?
   Les importations dépendent des flux de revenus des consommateurs (donc du PIB national). Les exportations dépendent de la compétitivité : plus le taux de change à l'incertain est fort (c'est à dire que la monnaie domestique est faible par rapport à la devise étrangère), plus le pays domestique est compétitif.
4. Pourquoi le solde des mouvements des capitaux dépend-il positivement du taux d'intérêt ?
   Plus le taux d'intérêt est élevé, plus il est rentable de placer ses capitaux dans le pays domestique.
5. En comptabilité nationale, comment s'appelle le solde $X - M$?
   La balance commerciale.
6. Pourquoi le solde de la balance des paiements est-il toujours égal à zéro ?
   C'est une égalité comptable. $X - M = K$*. C'est à dire que* $BP = (X - M) - K$*.* $BP = 0$ *par construction comptable.*

7. Écrivez l'équation BP. *(1 point)*

$$BP : X - M = K \Leftrightarrow Y = 1200e - 4500i + 2500 \tag{4}$$

8. Calculez Y, i et e à l'équilibre (lorsque les relations IS, LM et BP sont vérifiées). Vous arrondirez à trois chiffres après la virgule.
Il suffit de résoudre le système. On trouve $i \simeq 0,828 = 82,8\%$, $Y \simeq 1566$ *et* $e \simeq 2,327$ *(une unité de devise étrangère s'échange contre 2,327 unités de devise domestique).*

3. Questions (6 points)

1. Datez (au moins approximativement) la **révolution marginaliste**. Nommez les trois principaux contributeurs. Expliquez les enjeux pour la théorie économique.
Deuxième moitié du XIX^{è}. Walras, Menger, Jevons. Par rapport aux classiques, passage de la valeur-travail à la valeur-utilité. En termes de méthode, analyse mathématique, raisonnement "à la marge" = dérivation (querelle des méthodes avec l'école historique)
2. En comptabilité nationale, quelles sont les trois définitions du PIB ? Exprimez-les par une une égalité ($PIB = ... = ... = ...$), en économie fermée sans gouvernement.
Somme des valeurs ajoutées brutes (somme des richesses créées). Somme des revenus distribués. Somme des dépenses (emplois). En économie fermée privée, $PIB = \Sigma VAB = \Pi + W = C + I$.
3. Qu'est-ce que l'équivalence ricardienne ? Quelles en sont les conséquences en termes de politiques budgétaires ? Sur quelles hypothèses cette théorie repose-t-elle ?
Intuition de Ricardo, formalisation par Barro. Aussi appelée effet Ricardo-Barro. En cas de politique budgétaire expansionniste, les agents économiques anticipent une hausse future des impôts et donc augmentent leur épargne. Par conséquent, les politiques budgétaires expansionnistes sont inefficaces. Cependant, cette théorie repose sur des ***hypothèses drastiques*** *: les agents sont rationnels et se livrent à l'optimisation intertemporelle. Ils ont accès au système financier pour épargner. Par ailleurs, la dette publique n'est absorbée ni par la hausse du PIB (or les ressources publiques dépendent du PIB :* $T = tY$*), ni par la monétisation. En fait cette théorie repose sur les hypothèses nouvelles classiques : les dépenses publiques n'affectent pas le PIB ; la banque centrale ne monétise pas la dette publique, les agents sont rationnels, les marchés financiers sont parfaits.*

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice 1

1) Soit X la variable aléatoire : nombre de smartphones défectueux parmi les 3 retenus

$P(X = 0) = \frac{C_7^3 C_3^0}{C_{10}^3} = 0{,}292$

$P(X = 1) = \frac{C_7^2 C_3^1}{C_{10}^3} = 0{,}525$

$P(X = 2) = \frac{C_7^1 C_3^2}{C_{10}^3} = 0{,}175$

2) Si m est le nombre de smartphones défectueux dans un lot de 10, on a :

$$P(X = 0) = \frac{C_m^0 C_{10-m}^3}{C_{10}^3} = \frac{(10 - m)(9 - m)(8 - m)}{10\text{x}9\text{x}8}$$

m=0	P=100%	m=3	P=29,2%	m=6	P=3,3 %
m=1	P=70%	m=4	P=16,7%	m=7	P=0,8 %
m=2	P=46,7%	m=5	P=8,3%	m=8	P=0%

3) La lecture de la question précédente est la suivante : si le fournisseur livre 3 smartphones défectueux dans le lot livré de 10 smartphones, dans 29,2 % des cas, le test réalisé par le ministère ne va pas le détecter et va donc payer la facture. Il est logique de vouloir réduire cette probabilité.

4) Si on teste 4 machines au lieu de 3, il faut actualiser la question 2 avec un échantillon de 4 :

$$P(X = 0) = \frac{C_m^0 C_{10-m}^4}{C_{10}^4} = \frac{(10 - m)(9 - m)(8 - m)(7 - m)}{10\text{x}9\text{x}8\text{x}7}$$

m=0	P=100%	m=3	P=16,7%	m=6	P=0,5 %
m=1	P=60%	m=4	P=7,1%	m=7	P=0%
m=2	P=33,3%	m=5	P=2,4%		

Toujours dans l'hypothèse d'une proportion de 30 % de machines défectueuses dans la livraison (hypothèse de départ), la probabilité de n'observer aucune machine défectueuse dans l'échantillon passe de 29,2 % à 16,7 %. L'espérance de perte financière liée à l'acceptation d'un lot passe donc de 0,292 x le prix unitaire d'un smartphone à 0,167 x le prix unitaire d'un smartphone. Il nous faut donc le prix unitaire d'un smartphone.

Il faut ensuite comparer l'écart avec le coût d'un test supplémentaire. En effet, si le coût d'un test est supérieur à l'écart calculé précédemment, il ne faut pas envisager d'augmenter l'échantillon.

Pour fixer les idées, si le coût d'un smartphone est de 500 euros, tester un appareil supplémentaire fait gagner au ministère en moyenne 62,5 euros (perte de 146 euros avec test sur 3 machines et de 83,5 euros avec test sur 4 machines). Mais si le test d'une machine supplémentaire est de 80 euros, le ministère perd finalement en moyenne 17,5 euros.

Exercice 2

Chiffre d'affaires aux conditions économiques du 1er janvier 2010
(en milliers d'euros)

1er janvier	Taux d'inflation annuel	Indice des prix (base 100 au 1/1/2010)	Chiffre d'affaires en milliers d'euros courants	Chiffre d'affaires en milliers d'euros constants
2010	-	100	1000	1000
2011	5%	105	1197	1140 (*)
2012	8%	113,4	1508	1330
2013	3%	116,8	1864	1596
2014	6%	123,8	2538	2050

(*) 1140 = 1197 (colonne 4) / 1,05 (colonne 3)

Commentaire : le commerce a vendu 2 fois plus en volume en 2014 par rapport à 2010.

Exercice 3

Pas de corrigé type mais pour exemple, on peut citer que la population du Maroc a été multiplié par 6 en 100 ans, que la croissance de la population a été la plus forte sur la période 1952-1960, que cette croissance ralentit ces dernières années, que l'âge au premier mariage a reculé depuis 1960, plus pour les femmes que pour les hommes, qu'il y a aujourd'hui une majorité de citadins au Maroc, que la population vieillit, etc.