ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1ère Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Exercice I.

Soient les suites réelles $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \left\{ \begin{array}{lcccccc} u_{n+1} & = & u_n & + & 3v_n & & \\ v_{n+1} & = & 3u_n & + & v_n & + & 4w_n \\ w_{n+1} & = & & & 4v_n & + & w_n \end{array} \right. \quad \text{et } (u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 1)$$

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ est diagonalisable.
2. Diagonaliser la matrice A.
3. Déterminer la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Expliciter les termes u_n, v_n, w_n en fonction de n.

Exercice II.

On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$, calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy$.

Problème.

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1- (a) Rappeler la définition de la convergence absolue de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I.

(b) Rappeler la définition de la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I.

(c) Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I.

(d) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge absolument sur I.

(e) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I.
Indication : on pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

(f) On pose pour $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\dfrac{x^2 + n}{n^2} \right)$.
Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement puis converge uniformément sur $[0, 1]$ mais ne converge absolument en aucune valeur de $[0, 1]$.

2- Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante de réels positifs, $I = [0,1[$ et pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n x^n (1-x)$.

(a) Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.

(b) **(i)-** Calculer pour $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|$.

(ii)- Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\alpha_n}{n}$ converge.

(c) **(i)-** Calculer pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x^k$.

(ii)- On suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I.
On pourra observer que pour $k \geqslant n+1, \alpha_k \leqslant \alpha_{n+1}$.

(iii)- Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

3- Soit la fonction ζ de Riemann définie par $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de ζ, c'est-à-dire $D = \{x \ : \ \zeta(x) < \infty\}$.

(b) Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le domaine D et exprimer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\zeta^{(k)}$ comme somme d'une série.

(c) Montrer que ζ est convexe sur D.

(d) Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.

(e) Prouver que $\lim\limits_{x\to+1^+} \zeta(x) = +\infty$.
On pourra comparer à une intégrale.

4- Soient $g_n(x) = (-1)^n \cos^n x\,, \quad V_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$ et $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} g_n(x)\, dx$.

(a) Étudier la convergence de la série $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.

(b) Montrer que la suite V_n est positive, décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$.

(c) Montrer la convergence de la série de terme général W_n.

(d) Pour tout $a \in [0,1[$, on pose $A_n(a) = (-1)^n \displaystyle\int_0^a \cos^n x\, dx$ et $B_n(a) = (-1)^n \displaystyle\int_a^{\pi/2} \cos^n x\, dx$.

(i) Montrer que la série $\sum g_n$ converge normalement sur $[a, \pi/2]$.

(ii) Montrer que pour tout $0 < a < \pi/2$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} B_k(a) = \int_a^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x}\, dx = 1 - \tan(a/2)\,.$$

(iii) Montrer que pour tous $0 < a < \pi/2$ et $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} A_k(a) \leq \displaystyle\int_0^a \cos^{n+1}(x)\, dx$ et en déduire que $\lim\limits_{a\to 0} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} A_k(a) = 0$.

(e) Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} W_n = 1$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE

ENSEA ABIDJAN

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Doit-on avoir peur du progrès ?

Sujet n° 2

« Nous n'héritons pas de la terre de nos parents nous l'empruntons à nos enfants ».
Illustrez et prolongez cette citation de Léopold Sédar Senghor (1906-2001), chef d'Etat et poète.

Sujet n° 3

Les réseaux sociaux, médias en ligne, blogs redonnent-ils du pouvoir aux citoyens ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE

ENSEA ABIDJAN

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les exercices sont indépendants.

Exercice n° 1

Soit la fonction f : $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}}$.

1. Étudier les variations et tracer le graphe de f.

2. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

3. Pour $\alpha > 0$, on pose $f_\alpha(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{|x|^\alpha}$. Étudier les variations de f_α et la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$.

Exercice n° 2

Pour m > 0, on pose $f_m(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x^m} & si \quad x \neq 0 \\ 1 \quad si \quad x = 0 \end{cases}$

1. Pour quelle valeur de m la fonction est-elle continue ? (On notera f la fonction qui correspond à la valeur de m ainsi trouvée).

2. Étudier la dérivabilité de f.

3. Étudier la continuité de la dérivée de f.

4. f a-t-elle une dérivée seconde continue ?

Exercice n° 3

On considère deux suites de nombres réels (u_n) et (v_n) définies, pour n entier naturel, par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 4v_n \end{cases}$$ et u_0, v_0 sont donnés quelconques.

1. Exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_0, v_0 et n $u_0 + v_0$).

2. Étudier la convergence de ces deux suites.

Exercice n° 4

On considère la matrice M définie par : $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

1. Étudier la diagonalisation de M (si elle est diagonalisable, on précisera une base de vecteurs propres et on notera par D la matrice ainsi obtenue).

2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale (pour le produit scalaire euclidien) sur la droite engendrée par un vecteur propre de la matrice M associé à la valeur propre 3. On notera P_X cette matrice.

3. Déterminer la matrice de la projection orthogonale (pour le produit scalaire euclidien) sur le plan engendré par des vecteurs propres de la matrice M associés aux valeurs propres 2 et 3. On notera P_Y cette matrice.

4. Calculer les produits $P_X P_Y$ et $P_Y P_X$

5. Parmi les matrices suivantes : M, D, P_X, P_Y, quelles sont celles qui peuvent définir une norme sur R^3 ?

Exercice n° 5

Soit la matrice M définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

M.

2. Déterminer les valeurs propres de cette matrice. Que peut-on en conclure ?

M.

4. Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés aux deux valeurs propres non nulles de *M*.

5. Résoudre le système $\begin{cases} x+2y+3z=m \\ 2x+3y+4z=2m \\ 3x+4y+5z=3m \end{cases}$, où *m* est un paramètre réel.

Exercice n° 6

1. Pour *n* entier strictement supérieur à 3, on considère la fonction numérique f_n définie par : $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^2}$. Étudier les variations de cette fonction et tracer son graphe.

2. Soit $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$ pour *n* entier naturel. Calculer I_0, I_1, I_2

3. Calculer I_n et $J_n=\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$ pour tout *n*.

4. Étudier la suite (u_n) définie par : $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2}{1+u_n^2}$ et u_0 un nombre réel quelconque.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE

ENSEA ABIDJAN

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre de Monsieur Pierre RABHI * intitulé : « la puissance de la modération », paru aux éditions HOZHONI en octobre 2015.

Il doit être résumé en 250 mots (plus ou moins 10%).Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre copie.

La puissance de la modération

La plus grande exaction (1) de la

ressources abondantes mais limitées.

Ce culte enkysté dans le cerveau des experts et des politiques,
évidence sans cesse invoquée pour solutionner tous les problèmes. Il est devenu une sorte de dogme, de crédo quasi religieux, dont la remise en cause serait un blasphème qui, en des temps moins tolérants, aurait mérité le bûcher.

« toujours plus
dans sa psyché (2) le sentiment permanent du manque voire de la pénurie. Nous avons ainsi instauré le règne de la quantité et aboli la juste mesure. Le seuil de satisfaction étant sans

produire endre cet état pernicieux où les biens se

Nos outrances extérieures se révèlent inefficaces à combler nos vides intérieurs.
-ci, comme sentiment

humaine, car elle ne peut être confondue avec le plaisir. Elle peut advenir dans la chaumière et déserter le plus somptueux palais.

En Grèce antique déjà, la démesure, était considérée comme un crime engendrant immanquablement ; il est évident que notre immodération est la source de très nombreux déséquilibres actuels, que ce soit en termes -il encore rappeler à

cinquièmes des ressources ? Nous nous demandons comment et pourquoi tant de nos frères et

-up sur le bien commun. Une minorité a légalisé son droit à piller ce qui est nécessaire à la survie

Le « toujours plus » pour quelques-uns engendre le « toujours moins » pour le plus grand -ensemble universel, non seulement ne remet pas en cause cette anthropophagie mais la valide et la propage.

développement démesuré pouvait être néfaste à notre sphère terrestre et participer activement au processus de sa désertification, comme ce fut le cas en Egypte ancienne, en Mésopotamie,

et ailleurs.

ibéré de sa condition aléatoire de « chasseur-cueilleur-pêcheur
naissant est devenu également un défricheur et un pasteur immodéré.

Tel Prométhée, il a voulu atteindre une maîtrise totale

Il en résulte un constat plus que déplorable

ces considérations indé

!

Autrefois, le crime de recouvrait des violations comme le vol de propriété publique ou sacrée, et il était considéré comme répréhensible et immoral. Telle devrait être

protégé par les lois, com

en 1854 : «
choses se tiennent comme le sang qui unit une même famille. Tout ce qui arrive à la terre
» Ces paroles révèlent pour moi la spiritualité incarnée,

e en grande partie à notre rupture

pourvoyeuse de toutes les offrand
ressources à épuiser.

ant
à la valeur transcendante des liens inaliénables, garants de la continuité de notre aventure terrestre.

peut-être aurions- nous grand intérêt à nous inspirer des processus de notre Terre-Mère, et à opter délibérément pour la modération. Antidote à la démesure qui nous a causé tant de désagréments, elle apparaît comme une option consciente, un devoir moral, une posture
erselle.

A titre personnel, la modération a grandement inspiré notre retour à la terre et même le
: avec ma compagne
Michèle, nous avons opté pour la modération car elle recelait beauté et simplicité. Le fait

: toujours plus de terres, de

écologie. Loin du gigantisme et de la spécialisation, causes de tant de ruptures dans nos
ecréant
une synergie entre les divers éléments : terre, végétal, animal, humain, qui nourrissent à leur

-écologie est une démarche juste car elle permet de répondre au besoin impérieux de se nourrir dans le respect des sources même de la vie et de la

Elle offre une occasion de se reconnecter profondément à la Terre-Mère et permet ainsi de mieux appréhender le grand mystère. Vous pouvez faire analyser un échantillon de terre mais

: malgré tous nos savoirs, le mystère demeure. ..

otre légitimité : Plus nous sommes modérés, plus nous pouvons répondre par nous-mêmes à nos besoins

e de la simplicité. Elle libère du temps pour être et admirer, plutôt que de nous incarcérer dans le « produire » et le « consommer » et nous permet ainsi de répondre à notre véritable vocation.

la conscience du lien immuable qui

et de solidarité
leurs. Je me respecte, je resp
commune.

Je ne dis pas que le chemin vers la simplicité ou la sobriété est facile. Le système lui-

extirper. N

-

pas en charrette. Mais il nous reste toujours un espace dans lequel nous avons une marge de choix : il incombe à chacun de se demander à quel moment il outrepasse la juste mesure. Car

espèce, replaçant l
celui-ci ne pourra advenir sans la modération. La modération peut transformer le monde à
-même, retrouvant le

éveillé, faisant délibérément le choix de la modération, peut réellement participer à
gence continue à

humain.

Il est difficile de définir ce qui fait une destinée humaine. Je vois mon propre itinéraire
u imaginer que le petit orphelin du désert

vie. Je suis entré dans ce
prendre soin de la Terre-Mère, participer à sa régénération et à sa préservation pour le bien de
er la

toujours été au
-
démesure, source de plus de frustrations que de satisfactions. Décidément, la modération est à

Je ne crois pas à la puissance des comptes en banque. La vraie puissance est dans la

Nous ne pouvons accéder au bonheur par la voie de la matière, mais peut-être par la subtilité des éléments qui sont en nous, par une posture de détachement, par le fait de se déligoter des choses qui nous appesantissent.

Aucun faste sous des lustres flamboyants de cristal, aucune manifestation de la vanité conquérante, aucune construction en
rassemblant des hommes et des femmes dans la simplicité et la bienveillance.

Les ressources demeureront toujours insuffisantes, tant que la justice, la modération, un humanisme authentique et une conscience radicalement différente, ne présideront pas à leur usage.

déconvenue. Car la finalité est inévitable : il faudra faire de la frugalité un nouveau paradigme.

soumise à un pillage illimité. Je suis frugal parce que je veux me libérer de la
de
la marchandise veut me réduire. Je suis frugal parce que je ne veux pas contribuer à rendre la vie des générations à venir impossible.

La modération libère du temps pour un art de vivre. Le travail devient un labeur constructeur de sens et de bien-être physique et moral. Le temps de la puissance de la

la seule évidence.

Changement, cheminement

être humain ne change pas lui-même, il ne pourra changer durablement le monde dont il est le responsable. Nous oublions

Nos tourments sont à la racine de toutes les déviances de la société.

en victimes ou de chercher des boucs émissaires, nous cherchons et expérimentons des solutions.

Il y a en chacun de nous un tyran et une victime. Ces failles, si nous ne les accueillons pas pour les penser et les panser (7), font le lit des idéologies, du dogmatisme religieux, du conformisme militant. On se cherche un sauveur, une appartenance, une ligne de conduite, et

qui nous engage en notre âme et conscience et dans notre libre arbitre, à participer avec toute

(1) Exaction : abus ; détournement.
(2) Psyché : psychisme ; âme.
(3)
(4) Equité : égalité.
(5) Béotienne : imparfaite.
(6) Paradigme : modèle.
(7) Panser : soigner.

ogique en France.