REMARQUES ET RECOMMANDATIONS DU JURY A L'ISSUE DES EPREUVES DE MATHEMATIQUES SESSION 2022 (ISE option économie et option mathématiques)

ISE ECO

Première et deuxième composition de mathématiques

1. Contexte général

L'année 2022 a enfin vu revenir une normalité dans le déroulé des concours, après deux années amplement perturbées, en termes d'organisation générale globale et aussi de préparation pour les étudiants. Il faut reconnaître cependant que l'imprévu a été bien géré, les concours ont pu avoir lieu et deux promotions 2020 et 2021 ont été recrutées et sont en formation. Néanmoins, félicitons-nous d'un retour heureux à un concours respectant planning et dates.

2. Objectif des épreuves de Mathématiques du concours

Les deux épreuves de mathématiques sont destinées en principe à des étudiants en économie dont l'objectif est, à terme, d'être à l'aise avec l'application des méthodes quantitatives de la statistique et de la modélisation économique dans les futures études d'ISE et les métiers auxquels ouvrent ces mêmes études.

Le but de ces épreuves est donc de dégager une « tête » de concours composée de candidats ayant, a priori, les meilleures chances de comprendre, d'assimiler, puis d'utiliser les enseignements formalisés à dominante scientifique liés au diplôme ISE, diplôme d'ingénieur.
En outre, cette « tête » doit être suffisamment large pour permettre aux autres épreuves du concours de contribuer efficacement à la meilleure sélection et à la diversité des connaissances.
Pour ce faire, les épreuves de Maths 1 et Maths 2 doivent :

- d'une part, permettre de différencier les candidats par des énoncés progressifs, tout en essayant qu'ils soient accessibles à tous les candidats de bon niveau, sans privilégier telle ou telle formation initiale ; c'est l'ambition n°1 de la première épreuve, creuser et valider à la fois les connaissances et les compétences dans le domaine précis des mathématiques (connaissances et compétences ne sont pas synonymes),
- d'autre part, détecter et éliminer les candidats n'ayant pas assimilé les prérequis considérés comme nécessaires à des études d'ingénieur statisticien, en jouant sur toute l'étendue du programme du concours ; c'est la priorité de la deuxième épreuve.

Les deux épreuves, prises dans leur ensemble, sont conçues de façon cohérente pour couvrir à minima une proportion de 80 % des thèmes du programme, et ainsi détecter les éventuels « trous » (ou impasses) de chacun des candidats.
Il est donc fait appel aux connaissances générales des candidats mais aussi à leurs capacités de réflexion et de réaction dans un contexte mixant parfois des étapes successives et progressives avec la résolution de « petits » exercices (compréhension générale et savoir-faire technique ponctuel).
La volonté est d'avoir des épreuves sélectives avec une étendue de notes la plus large possible, pour que toutes les épreuves du concours puissent avoir une influence sur le classement final du concours.

3. Les épreuves 2022

Les grands thèmes des contenus des deux épreuves du concours 2022 étaient les suivants :

Epreuve de Maths 1 : (4 heures)
Elle était constituée de deux exercices et un problème, indépendants.
Le premier exercice (2 questions) portait sur les relations d'équivalence et d'ordre, notions figurant explicitement au programme.
Le deuxième exercice (2 questions) consistait à maximiser une fonction objectif linéaire sur un ensemble défini par des droites.

Le problème reposait sur l'étude générale de la fonction de la variable réelle x définie par $f_a(x) = x^a/(1 + |x|^a)$, où a est un paramètre réel. Il était composé de trois parties successives d'une difficulté progressive : a = 1, a = 2, cas général (les deux premières parties étaient censées apporter d'utiles informations au cas général, selon que a était impair – partie 1 – ou pair – partie 2 –).

Au total, 19 questions pour le problème.

Epreuve de Maths 2 : (3 heures)
Elle était constituée de cinq exercices indépendants couvrant des thématiques différentes, afin de parcourir l'éventail le plus large du programme ; puisque le problème de la première épreuve était de l'analyse, aucun exercice d'analyse n'était proposé.

Ces cinq exercices proposaient 20 questions au total :

- Le premier portait sur les polynômes, plus précisément sur une application linéaire définie sur les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
- Le deuxième traitait de matrices carrées et de résolution de système linéaire à 3 inconnues.
- Le troisième abordait les puissances de matrices carrées.
- Le quatrième portait sur les propriétés d'une suite définie comme racine d'un polynôme de degré n.
- Le cinquième, sur les probabilités, était centré sur les variables aléatoires continues et les fonctions de hasard (très utilisées, par exemple, en statistique médicale – données de survie – et en fiabilité).

4. Déroulement des épreuves et observations après correction

Epreuve de Maths 1 :

Les deux exercices comptaient sur 5 au total, et le problème sur 15.

Exercice 1 :
A la grande surprise de l'auteur, ce sujet portant, répétons-le, sur des points explicitement au programme du concours, n'a été traité correctement que par un tout tout petit nombre de candidats.
Cela conduit à se poser des questions sur la maîtrise, si non tout simplement la connaissance ou la lecture du programme du concours. Si cela n'était pas décevant, certaines réponses étaient plutôt drôles, mélangeant associativité, commutativité, élément neutre, présence d'un signe d'inégalité, etc ….

Exercice 2 :
Lui aussi a été très sélectif ; il consistait pourtant à maximiser la fonction x + 2y sur un sous-espace de R² défini par cinq inégalités simples (linéaires en x et y, dont x positif et y positif).
La sélectivité de ces deux exercices – a priori simples et destinés à mettre sur une bonne voie les candidats – a été étonnante.

Problème :
Finalement plus classique, le problème d'analyse a permis d'affiner la hiérarchie entre les candidats ; la notion de valeur absolue de x (intervenant dans la fonction à traiter) a été un facteur de déstabilisation, comme les questions plutôt théoriques sur les concepts d'injection et de surjection.
Les trois parties ont réalisé leur objectif de sélection.
Il est quand même étonnant de constater :

- d'une part que la moitié des candidats a eu du mal à voir que Y/(1 + IYI) prend ses valeurs entre – 1 et + 1 quand Y varie sur R,
- et, d'autre part, que certains candidats, en nombre non négligeable, ne respectent pas l'ordre des parties et ont commencé par la partie 3 ; une lecture attentive et préliminaire du sujet – sinon une certaine proximité avec la rédaction d'un sujet – devrait leur montrer que la difficulté des parties est croissante, et que les parties 1 ou 2 apportent des éléments potentiellement intéressants pour le cas général de la partie 3.

Epreuve Maths 2 :
Cette deuxième épreuve est, en général, souvent considérée par les candidats comme plus abordable que l'épreuve n°1 : la durée est de 3 h seulement, le chiffre 2 de l'intitulé Maths 2 est moins impressionnant que le 1 de Maths 1 ; en outre, les coefficients ne sont pas les mêmes et les énoncés sont plus courts.
La diversité des domaines abordés fait qu'un étudiant peut « normalement » espérer trouver un domaine ou un énoncé avec lequel il se sent plus à l'aise, ce qui lui permet de commencer l'épreuve dans un contexte plus positif.

Ceci est à la fois théorique mais aussi un constat d'expérience.

Dans les faits :

Exercice 1 : application linéaire sur les polynômes
N'a pas soulevé de difficulté particulière (aux erreurs de calcul près), sauf pour la recherche du noyau.

Exercice 2 : matrices et système linéaire
Exercice assez classique, plutôt bien traité (toujours aux erreurs de calcul près).
A noter un nombre important de candidats transformant bien un système en le mettant sous la forme AX = B en X = $A^{-1}B$, mais revenant à la méthode de substitution pour trouver X, ce qui est une perte de temps et une cause d'erreurs.

Exercice 3 : puissances de matrices
Assez sélectif, bien traité par les candidats qui l'ont abordé correctement.
A noter que le développement du binôme à la puissance n ne semble pas uniformément maîtrisé.

Exercice 4 : suites et polynômes
Exercice « fin » et perçu comme difficile, donc sélectif.

Exercice 5 : probabilités
Traitant des v.a.r. continues, il a été néanmoins abordé et a apporté sa contribution à la hiérarchie globale.

ISE MATHS

Première composition de mathématiques

1 Contenu du sujet
Le sujet était constitué de deux problèmes indépendants. Le premier problème s'intéressait à des solutions d'équations différentielles et leur approximation par des suites (théorème de Cauchy-Lipchitz, développement de Taylor, étude de suites numériques). Le deuxième problème consistait en l'étude de sous-groupes particuliers de Z2, de sous-anneaux et d'idéaux, pour finalement décrire la famille des automorphismes de ces sous-groupes.
Dans l'ordre d'apparition, le sujet demandait des compétences dans les domaines suivants
Analyse
— résolution d'équations différentielles linéaires, avec second membre,
— résolution d'équations différentielles par théorème de Cauhcy-Lipchitz,
— théorème de dérivation d'une intégrale,
— formule de la moyenne,
— étude de fonctions,
— étude de suites avec formule de récurrence,
— formule de Taylor avec reste,
— convergence de suites.
Algèbre
— groupes,
— anneaux,
— idéaux d'un anneau,
— résolution de systèmes linéaires dans Z,
— groupe de transformations (GL2 et O2),
— automorphismes de groupes,
— représentations matricielles de transformations.
1
3.1 Analyse
Sur le problème d'analyse :
— On remarque que les questions 2, 4, 5, et 14 sont relativement binaires. C'est soit tout faux,
soit tout juste.
Q2 Résolution d'une équation différentielle linéaire avec second membre.
Q4 Toute fonction continue sur un compact est bornée.

Q5 Théorème de Cauchy-Lipchitz.
Q14 Principe de récurrence sur une suite arithmético-géometrique.
Il n'y a effectivement pas d'ambiguïté sur ces questions. Soit le candidat sait faire, soit il ne sait pas.
— On remarque que certaines questions étaient très faciles. Ce sont les questions 1 et 13.
Q1 Résolution de $y' = -2y$.
Q13 Etudier la positivité de $\exp(x) - x - 1$ sur $\mathbb{R}^+$.
— Enfin, on remarque que certaines questions étaient difficiles, alors qu'elles sont pour la plupart au début du sujet et ne devrait poser aucune difficulté. Il s'agit des questions 3, 7, 8, 9, 11, 15, 16 et 17.
Q3 Montrer que la solution d'une équation différentielle linéaire avec second membre continue est de classe C^1.
Q7 Montrer que la solution d'une équation différentielle non-linéaire $y' = F(t, y)$ avec $F \in C^1$ est de classe C^2.
Q8 Etudier la régularité de la fonction
$$\int_0^t F(s, z(s))ds.$$
Q9 Formule de la moyenne
Q11 Montrer qu'une suite (sous-)arithmétique $x_{n+1} \leq x_n + M$ divisée par n est bornée.
Q15 Montrer qu'une série (dérivée) exponentielle $\sum k \exp(-k)$ converge.
Q16 Estimer la croissance d'une suite issue d'un schéma d'Euler $x_{n+1} = x_n + hF(nh, x_n)$ avec F globalement lipchitzienne par $|x_{n+1}| \leq (1 + K_1)|x_n| + K_2 n + K_3$.
Q17 Montrer que $\exp(-M nh)x_n$ est bornée pour une certaine constante M.
Il n'est pas souhaitable que les candidats bloquent sur les questions 3, 7 et 8 qui sont des questions élémentaires. Une majorité écrasante de candidats répondent "c'est continu, donc c'est C^1", ou encore "c'est continu, dérivable, et C^1" sans aucune indication supplémentaire.
Concernant la question 9, un nombre trop important de candidats répond "par développement limité" ou "en dérivant par rapport à t à gauche et à droite, on retrouve une égalité".
Pour la question 11, d'après les candidats, toute suite est forcément bornée, ce qui simplifie énormément la suite de l'épreuve.
La question 15 est sans aucun doute le point noir de l' épreuve. Certains candidats majorent la somme $d_n = \sum_{k=1}^{n} k \exp(-k)$ par $n(n-1)$ en utilisant $\exp(-k) \leq 1$ pour ensuite conclure que d_n est bornée par la constante $n(n-1)$. J'ai comptabilisé plus de 50 candidats utilisant cette argumentation !

3.2 Algèbre

Sur le problème d'algèbre :
— On remarque que les questions 2, 10, 16, 17, 18, 19 sont relativement binaires. C'est soit tout faux, soit tout juste.
Q2 Montrer que le produit d'un couple de nombres (dont la somme est paire) par un entier reste un couple dont la somme est paire.
Q10 Trouver un couple d'entiers (m, n) tels que $(m^2, n^2) = (km, kn)$ pour aucun entier k, sachant que $(1, -1)$ convient.
Q16 Montrer que GL_2 est un groupe.
Q17 Montrer que O_2 est un groupe.
Q18 Montrer qu'une application est un morphisme de groupe additif.
Q19 Montrer qu'un sous-ensemble particulier de O_2 est un sous-groupe.
Ces questions sont accessibles à tous les candidats. Il est regrettable que certains n'obtiennent pas tous les points sur ces questions élémentaires.
— On remarque que les questions 1, 3, 5, 7, 8, 9 étaient très simples.
Q1 Montrer que l'ensemble des couples d'entiers dont la somme est paire forme un groupe additif.
Q3 Montrer que la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

)
est inversible.
Q5 Montrer que l'ensemble des couples d'entiers dont la somme est paire forme un anneau.
Q7,8,9 Montrer que l'ensemble engendre par un ou deux éléments par addition forme encore un sous-groupe.
— On remarque que les questions 4, 6, 12, 13, 14 et 15 étaient très compliquées. Pourtant certaines apparaissent dès le début du sujet, et les candidats devraient se concentrer sur ces questions qui sont accessibles.
Q4 Montrer que tout couple d'entiers $(g1, g2)$ avec $g1 + g2$ pair peut s'écrire $g1 = m + n$ et
6
$g2 = m - n$. Il suffit de résoudre un système 2×2 dans Z. En effet $m = (g1 + g2)/2 \in Z$ et $n = (g1 - g2)/2 \in Z$.
Q6 Trouver un sous-anneau non trivial. Sachant que la partie II contenait au moins deux exemples des tels sous-anneaux.
Q12,13 Inverser une matrice 2×2 dans Z sachant que l'inverse du déterminant était un entier. On pouvait alors décrire le sous-anneau et idéal engendré par deux éléments u et v. Beaucoup d'incohérences dans les réponses à cette question.
Q14,15 Faire pareil qu'en questions 12 et 13, mais quand le déterminant valait 2. Cette fois-ci il fallait se souvenir que les couples d'entiers possédaient une somme pair pour se rendre compte qu'on pouvait encore inverser la matrice 2×2 dans Z.
— La question 11 était sans aucun doute la question la plus clivante dans ce sujet. Il fallait montrer une équivalence entre "I[u] est un idéal" et "u possède une coordonnée nulle" pour le sous-groupe I[u] engendré par $u = (u1, u2)$. L'implication réciproque est souvent abordée correctement par les candidats, mais l'implication directe est pratiquement tout le temps incorrecte : les candidats ne sachant pas caractériser l'impossibilité de l'identité
$\forall(g1, g2) \in Z2, \exists m \in Z : (g1u1, g2u2) = (mu1, mu2)$
dans le cas $u1u2$ 6 = 0. Il suffit pourtant de prendre $g1 = u1u2$ et $g2 = -u1u2$ (ou d'autres cas simples) pour se rendre compte de l'incohérence.

3.3 Conclusions générales

De manière générale, les questions qui sont utiles pour départager les candidats sont les questions dont les 5 barres sont de hauteurs comparables, ou dont la barre des 0/4 est élevée avec une barre de 4/4 également assez haute. En effet, soit la question permet de répartir les candidats relativement à leur niveau, soit la question est sélective et seuls les bons candidats obtiennent les points.
En analyse, on peut remarquer que c'est le cas des questions 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 14, 15, 18 et 19. Les questions 9, 11, 12, 16 et 17 étaient trop difficiles. Du point de vue du correcteur, elles étaient pourtant les seules questions intéressantes des deux premières parties d'analyse. La troisième partie était pratiquement inaccessible pour une très grande majorité des candidats qui ne savent pas manipuler des développements de Taylor à l'ordre 2 ou des majorations par des séries convergentes.
En algèbre, les questions utiles étaient les questions 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 16, 17, 18 et 19. Les questions 3 et 7 étaient trop simples et ne servaient à rien dans l' épreuve. Car même les candidats sachant inverser la matrice dans la question 3 ne comprenaient pas qu'ils devaient l'utiliser en question 4. Le correcteur trouve que les questions 4, 10 et 11 ont joué un rôle prépondérant dans la classification des candidats, car ces questions n'ont été comprises que par les bons candidats.
Ces indicateurs permettent de conclure que le sujet a permis de classer les candidats.

3.4 Remarques

Le correcteur tient à exprimer sa colère face aux candidats qui majorent une série par $n(n - 1)$ pour conclure qu'elle est bornée. C'est inadmissible et il espère qu'une telle erreur ne se reproduira plus jamais.
Le correcteur tient à insister sur l'incohérence d'une pratique particulièrement répandue qui consiste à recopier systématiquement l'intitulé des questions sur la copie avant de répondre. Les candidats perdent un temps considérable, alors que cela ne sert strictement à rien. Les questions sont numérotées, et il suffit de donner le numéro pour s'y référer.
Plusieurs candidats pensent qu'en répondant à des nombreuses questions, ils auront plus de points. C'est malheureusement une stratégie perdante, car cela montre qu'ils ne savent répondre correctement que par chance en multipliant les réponses au hasard.

Deuxième composition de mathématiques

Contexte

L’épreuve est composée de 6 exercices indépendants. Trois exercices portent sur l’algèbre (diagonalisation de matrices, matrices de projection orthogonale et matrices de rotation, matrices antisymétriques) et les trois autres sur l’analyse (étude de fonctions, calcul intégral, suites et séries).

L’épreuve est peut-être un peu longue, mais il s’agit d’un concours et elle a été strictement notée sur vingt.

Résultats

Chaque question a toujours été traitée par au moins une dizaine de candidats. L’étude des fonctions est le thème le mieux réussi dans l’ensemble, mais très souvent des résultats évidents sont détaillés.