ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ de la 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est composée de deux exercices et un problème, indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice 1 :

1) Soit a et b deux entiers naturels tels que a < b. On suppose que a divise b, q étant le quotient de b par a.
Montrer que a divise b – a. Quel est le quotient de (b – a) par a ?

Soit q le quotient naturel de b par a : b = qa
Alors b – a = (q-1)a, donc a divise b – a (et le quotient est q – 1).

2) En déduire les entiers naturels n tels que n – 1 divise n + 3 ?

Si n −1 divise n+3, alors, d'après la première question, puisque n – 1 < n + 3, n −1 divise aussi n+3 − (n −1) = 4.
Les diviseurs de 4 sont 1, 2 et 4.
D'où : n−1 =1 ou n−1= 2 ou n−1 = 4, ce qui conduit à n = 2 ou n = 3 ou n =5.
Les entiers naturels n tels que « n −1 divise n+3 » sont : 2, 3 et 5.

Exercice 2 :

1) On considère la fonction réelle f de la variable réelle positive x définie par :

$$f : x \in \mathbb{R}^{+*} \to f(x) = \sqrt{x(x+2)}$$

Etudier précisément ses variations (domaine de définition, calcul et signe des dérivées première et seconde, branches infinies, tangentes aux points remarquables, etc …) et tracer son graphe dans un repère orthonormé classique.

On remarque tout d'abord que f > 0, et définie pour tout $x \geq 0$; $f(0) = 0$.

Dérivée première :

$f'(x) = \frac{x+1}{[x(x+2)]^{1/2}}$; f ' est positive.

$\mathrm{Lim}_{x\to 0} f'(x) = +\infty$

Dérivée seconde :

$f''(x) = -1 / [x(x+2)]^{3/2}$, négative

D'où le tableau de variations :

x	0		+∞
f ''		−	
f '	+∞	↘	1
f	0	↗	+∞

Branches infinies ($x \to +\infty$) :

$y/x \to 1$

$y - x = \sqrt{x(x+2)} - x = \frac{2x}{x + [x(x+2)]^{1/2}} \to 1$

La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote pour f.

2) On considère la fonction réelle g de la variable réelle strictement positive x définie par :

$$g : x \in \mathbb{R}^{+*} \to g(x) = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$$

Etudier ses variations.

$g > 0$

$\mathrm{Lim}_{x\to 0+} g(x) = +\infty$

Dérivé première :

$g'(x) = g(x)\,\frac{x^2-2}{x^2(x+2)}$

Dérivée seconde :
Après calculs, on obtient :
g''(x) = $\frac{4g(x)(x+1)^2}{[x^2(x+2)]^2}$

Comme g > 0, g'' > 0

Tableau de variations :

x	0		+∞
g ''		+	
g '	-∞	↗	0
g	+∞	↘	0

Problème : variations autour de l'exponentielle

<u>Introduction : rappels et préliminaires</u>

a) Le symbole exponentiel e désigne la base des logarithmes naturels (ou népériens), dont le symbole est Ln ; e est défini par Ln e = 1 ; e ≈ 2,718 ; $e^{1/2}$ ≈ 1,65 ; $e^{-1/2}$ ≈ 0,61.
b) On rappelle que la dérivée f ' d'une fonction réelle f est la limite, si elle est finie, quand ε tend vers 0, du rapport [f(x+ε) – f(x)]/x :

f '(x) = $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{x}$

c) On rappelle que, quand u → 0, on a les équivalences suivantes :
Ln (1 + u) ≈ u
e^u ≈ 1 + u
$(1 + u)^\alpha$ ≈ 1 + α.u

d) On donne les valeurs des deux intégrales A et B suivantes :
A = $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\ dx = \sqrt{2\pi}$
B = $\int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} e^{-x^2/2}\ dx = 0{,}8426\sqrt{2\pi}$ ≈ 2,1
M = $\int_0^1 e^{-x^2/2} dx$ ≈ 0,855

<u>Partie A</u>

Soit f_a la fonction définie sur l'espace des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f_a : x \in \mathbb{R} \to f_a(x) = e^{ax^2}$$

où a est un paramètre réel.

1) Étudier le cas a = 0.

En préliminaire, pour a = 0, $f_0(x) = 1$, droite horizontale d'ordonnée 1. On supposera par la suite $a \neq 0$.

2) Quelle est la valeur de l'expression $f_a(x).f_{-a}(x)$?

$f_a(x).f_{-a}(x) = 1$ (remarque : valable aussi pour a = 0)

3) Exprimer f'_{-a}, dérivée première de f_{-a}, en fonction de f_a et f_a'.

$f'_{-a}(x) = - f'_a(x)/f^2_a(x)$

4) Étudier les limites éventuelles de $f_a(x)/x$ quand x tend vers + ∞ et - ∞.

Quand x tend vers + ∞ et - ∞ :
Pour a = 0 lim $f_0(x)/x = \lim 1/x = 0$
Pour a > 0 : quand x tend vers +∞, lim $f_a(x)/x = + \infty$
Pour a > 0 : quand x tend vers -∞, lim $f_a(x)/x = + \infty$

5) Étudier les fonctions f_1 et f_{-1} associées respectivement aux valeurs 1 et -1 du paramètre a.

Les fonctions f_1 et f_{-1} sont paires (donc graphe complet par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées). Il suffit de les étudier sur R^+.
$f_1(x) = e^{x^2}$
$f'_1(x) = 2xe^{x^2}$
$f''_1(x) = 2(2x^2 + 1)\, e^{x^2}$

Sur R^+, f'_1 est nulle en x = 0 et > 0 pour x > 0.
Donc e^{x^2} est monotone croissante sur R^+ ; $f_1(0) = 1$, et la limite en + ∞ est égale à + ∞.
Tangente horizontale en (0, 1)
En outre la dérivée seconde est strictement positive, donc pas de changement de courbure (fonction convexe).

$f_{-1}(x) = e^{-x^2}$

$f'_{-1}(x) = -2xe^{-x^2}$
$f''_1(x) = 2(2x^2 - 1)\, e^{-x^2}$
Sur R^+, f'_{-1} est nulle en x = 0 et < 0 pour x > 0.
Donc e^{-x^2} est monotone décroissante ; $f_{-1}(0) = 1$, limite en + ∞ égale à 0 (axe des abscisses asymptote horizontale).
Tangente horizontale en (0, 1) (c'est le point maximum de la courbe représentant f_{-1}).
En outre la dérivée seconde s'annule en $1/\sqrt{2}$, est négative avant, positive après (donc d'abord concave, puis convexe).

6) Étudier la fonction f_a (variations, limites, forme du graphe, …).
Donner l'équation de la tangente à la courbe représentant f_a au point d'abscisse x = 1.

Fonction paire ; étude sur R^+.
$f_a(0) = 1$
$f'_a(x) = 2axe^{ax^2}$ nulle en x = 0
$f_a''(x) = 2a(2ax^2 + 1)e^{ax^2}$

Cas a > 0 :
$f_a'(x) > 0$ pour x > 0 : fonction f_a croissante
Limite en + ∞ égale à + ∞.
Dérivée seconde > 0 ; pas de changement de courbure, fonction convexe.

Cas a < 0 :
$f_a'(x) < 0$ pour x > 0 : fonction f_a décroissante
Limite en + ∞ égale à 0.
Dérivée seconde : nulle en $x_0 = \sqrt{-1/2a}$ ($x_0 > 0$ puisque a < 0)
Donc changement de signe en x_0, négative avant et positive après (concave puis convexe).

Tangente en x = 1 ($f_a(1) = e^a$) : $(y - e^a)/(x - 1) = 2a.e^a$
D'où l'équation : $y = 2ax.e^a + e^a(1 - 2a)$

7) Calculer l'intégrale I = $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

Dans la partie « Préliminaires er rappels », nous avons vu A = $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$.

De façon évidente, en raison de la parité de la fonction, A = 2C où C = $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx$.
Donc C = $\sqrt{2\pi}$ / 2 = $\sqrt{\pi/2}$.
Posons $u = x/\sqrt{2}$; $dx = \sqrt{2}.du$, u varie de 0 à + ∞.

$C = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{2} . I$ ==> $I = C/\sqrt{2}$

D'où I = $\sqrt{\pi} / 2 \approx 0{,}89$.

Partie B

On définit la fonction g_a sur l'intervalle [0, 2] par :

- pour $0 \le x < 1$: $g_a(x) = e^{ax^2}$
- pour $1 \le x \le 2$: $g_a(x) = a$

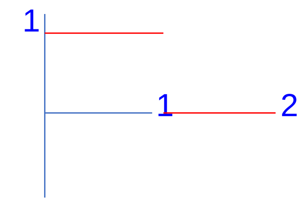
où a est un paramètre réel.

8) Etudier les cas particuliers a = 0, a = 1 et a = - 1.

a = 0

Pour $0 \le x < 1$: $g_0(x) = 1$

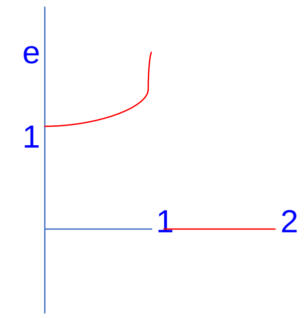
Pour $1 \le x \le 2$: $g_0(x) = 0$



a = 1

Pour $0 \le x < 1$: $g_1(x) = e^{x^2}$

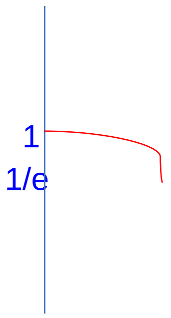
Pour $1 \le x \le 2$: $g_1(x) = 1$



a = -1

Pour $0 \le x < 1$: $g_{-1}(x) = e^{-x^2}$

Pour $1 \le x \le 2$: $g_{-1}(x) = -1$



1 2

9) Existe-t-il des valeurs de a telles que g_a soit continue au point x = 1 ?

Au point 1, $g_a(1) = a$
Quand $x \to 1_-$, $\lim e^{ax^2} = e^a$

Pour que g_a soit continue en x=1, on doit avoir $e^a = a$.

Soit $v(a) = e^a - a$.
$v'(a) = e^a - 1$
$v''(a) = e^a$

a	$-\infty$		0		$+\infty$
v''			+		
v'	-1	-	0	+	$+\infty$
v	$+\infty$		1		$+\infty$

Le minimum de v est atteint pour a = 0, et vaut 1. v(a) ne peut être nul.
Donc il n'existe aucune valeur de a telle que $e^a = a$, donc pas de valeur de a assurant la continuité de g_a.

10) On définit la fonction G(a) par : $G(a) = \int_0^2 g_a(x)\,dx$

a) Expliciter G(a).

$G(a) = \int_0^1 e^{ax^2}dx + \int_1^2 a dx = a + \int_0^1 e^{ax^2}dx$

b) Quel est le domaine de définition de G ?

G est définie pour tout a réel.

c) Calculer G(0) et G(-1).

$G(0) = 0 + \int_0^1 1dx = 1$

$G(-1) = -1 + \int_0^1 e^{-x^2}dx = -1 + J$

Calcul de $\int_0^1 e^{-x^2}dx = J$ *:*

Dans la partie Introduction, nous avons vu B = $\int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} e^{-x^2/2}\ dx \approx 2{,}1$.

B = $2\int_0^{+\sqrt{2}} e^{-x^2/2}\ dx$ d'où $\int_0^{+\sqrt{2}} e^{-x^2/2}\ dx \approx 2{,}1/2$.

Posons u = x/$\sqrt{2}$, u varie de 0 à 1, dx = $\sqrt{2}$.du

$\int_0^{\sqrt{2}} e^{-x^2/2}\ dx = \sqrt{2}\int_0^1 e^{-u^2}\ du = 2{,}1/2$

D'où J = 2,1/(2. $\sqrt{2}$) ≈ 0,74

Et donc G(-1) = -0,26.

11) On considère maintenant a ≥ 0.

a) Déterminer une borne inférieure et une borne supérieure pour G.

$G(a) = a + \int_0^1 e^{ax^2}dx$

$0 \le x < 1 \Rightarrow 0 \le x^2 < 1 \Rightarrow 0 \le ax^2 < a \Rightarrow 1 \le e^{ax^2} < e^a$

Il s'ensuit : $1 \le \int_0^1 e^{ax^2}dx < e^a$

D'où $a+1 \le G(a) = a + \int_0^1 e^{ax^2}dx < a + e^a$

b) En utilisant la définition de la dérivée rappelée en introduction, donner l'expression de G'(a).

$G(a+\varepsilon) - G(a) = a+\varepsilon + \int_0^1 e^{(a+\varepsilon)x^2}dx - a - \int_0^1 e^{ax^2}dx$

$= \varepsilon + \int_0^1 e^{(a+\varepsilon)x^2 - ax^2}dx = \varepsilon + \int_0^1 e^{ax^2}(e^{\varepsilon x^2} - 1)dx$

Or quand $\varepsilon \to 0$, $(e^{\varepsilon x^2} - 1) \approx \varepsilon x^2$

Donc : $G(a+\varepsilon) - G(a) = \varepsilon + \int_0^1 \varepsilon x^2 e^{ax^2}dx$

$[G(a+\varepsilon) - G(a)]/\varepsilon = 1 + \int_0^1 x^2 e^{ax^2}dx$

Il s'ensuit : $G'(a) = 1 + \int_0^1 x^2 e^{ax^2}dx$

c) En déduire le tableau de variations de G.

L'expression de G'(a) montre que G'(a) > 0 pour tout a.

G(a) est donc monotone strictement croissante.

Quand $a \to +\infty$, $G(a) \to +\infty$

Quand a = 0, G(a) = 1

a	0		+∞
G'		+	
G	1	↗	+∞

12) Dans cette question, on prend a ≥ 1.

L'équation G(a) = 4a a-t-elle des solutions ? (On pourra étudier les variations de N(a) = G(a) – 4a)

$G(a) = 4a \Leftrightarrow \int_0^1 e^{ax^2}dx = 3a$

Posons $N(a) = \int_0^1 e^{ax^2}dx - 3a$

$N'(a) = \int_0^1 x^2e^{ax^2}dx - 3$

$N''(a) = \int_0^1 x^4e^{ax^2}dx$

Comme N'' est > 0, on obtient le tableau de variations suivant pour N(a) :

a	1		a*		+∞
N''			+		
N'	m(1)	-	0	+	+∞
N	N(1)	↘	m(2)	↗	+∞

N' est croissante pour $x \geq 1$; son minimum est en x = 1, noté $m(1) = \int_0^1 x^2e^{x^2}dx - 3$.

Sur [0, 1], $e^{x^2} \leq 1$.

Donc $m(1) = \int_0^1 x^2e^{x^2}dx - 3 \leq \int_0^1 x^2dx - 3 = -8/3$

Il s'ensuit que m(1) est négatif.

Il existe donc une valeur a* telle que N'(a*) = 0, N' < 0 avant, et > 0 ensuite.

N est donc décroissante sur (1, a*) et croissante sur (a*, +∞).

Notons N(1) la valeur de N en a = 1 et m(2) = N(a*).

$N(1) = \int_0^1 e^{x^2}dx - 3$

Pour x entre 0 et 1, e^{x^2} est entre 1 et e.

$1 < \int_0^1 e^{x^2}dx < e$ d'où $-2 < N(1) < e - 3$

Donc N(1) est négatif.

Il en résulte que m(2) < 0.

Comme $\lim_{a\to+\infty} N(a) = +\infty$. Il existe une valeur a' de a (a' > a*) telle N(a) = 0.

L'équation N(a) = 4a admet donc une solution et une seule.

<u>Partie C</u>

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

- pour $0 \leq x \leq 1$: h(x) = 1

- pour x > 1 : h(x) = 1 – $e^{-(x-1)^2/2}$

Soit l'intégrale H(x) = $\int_0^x h(t)dt$.

13) La fonction h est-elle continue ? Dérivable ?
Donner son tableau de variation et la forme de son graphe.
Quelle est l'équation de la tangente au point x = 2 à la courbe représentant h ?

En x = 1, h(1) = 1
$\text{Lim}_{x\to 1+}h(x) = 0$
h n'est donc pas continue en x=1 (et donc non dérivable en ce point).

$\text{Lim}_{x\to +\infty}h(x) = 1$

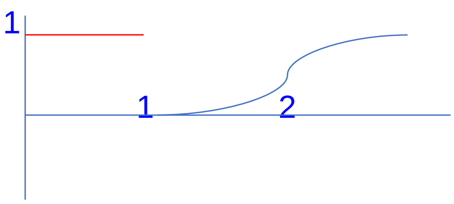
Pour x ≤ 1 : h'(x) = 0
Pour x > 1 : h'(x) = (x-1)$e^{-(x-1)^2/2}$, qui est strictement positive

Dérivée seconde (pour x > 1) :
h''(x) = $e^{-(x-1)^2/2}(1 – (x-1)^2)$
h'' s'annule en x = 2.
h'(2) = $e^{-1/2}$

Tableau :

x	0		1		+∞
h'		0		+	
h	1	constante	1 / 0	↗	1

Forme du graphe de h :



Equation de la tangente en x = 2 :
h(2) = 1 – $e^{-1/2}$
(y - 1 + $e^{-1/2}$)/(x – 2) = $e^{-1/2}$
D'où : y = $e^{-1/2}$.x + 1 – $3^{e-1/2}$

14) Étudier la continuité et la dérivabilité de H.

Continuité :

Pour x ≤ 1, H(x) = x et H(1) = 1.

Pour x > 1, H(x) = 1 + $\int_1^x (1 - e^{-(t-1)^2/2})dt$ = x - $\int_1^x e^{-(t-1)^2/2}dt$

On en déduit que quand x → 1_+, H(x) tend vers 1.

L'intégrale H est donc continue en 1.

Dérivabilité :

De façon évidente, u étant la dérivée de H, on a vu (question précédente) que les limites en 1_- et en 1_+ étaient différentes donc H n'est pas dérivable en 1.

Pas de problème pour les autres points.

On a alors :

Pour x ≤ 1, H'(x) = 0

Pour x > 1, H'(x) = 1 – $e^{-(x-1)^2/2}$ (qui est positive, donc H est croissante sur l'intervalle]1, +∞]).

15) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentant H au point d'abscisse x = 2.

H(2) = 2 - $\int_1^2 e^{-(t-1)^2/2}dt$

H'(2) = h(2) = 1 – $e^{-1/2}$

Tangente :

(y – H(2))/(x – 2) = 1 – $e^{-1/2}$

y = x(1 – $e^{-1/2}$) – 2(1 – $e^{-1/2}$) + H(2)

Remarque : en faisant le changement v = t-1 dans l'intégrale $\int_1^2 e^{-(t-1)^2/2})dt$, v varie de 0 à 1, dt = dv, et donc $\int_0^1 e^{-v^2/2}dv$ est l'intégrale M de la partie introductive, voisine de 0,34 ; soit H(2) ≈ 1,66.

Comme $e^{-1/2}$ ≈ 0,61, on obtient : y = 0,39x + 0,88

16) Étudier la limite de H(x)/x lorsque x tend vers + ∞.

Existe-t-il une asymptote pour H lorsque x → + ∞ ?

Pour x « grand », H(x) = x - $\int_1^x e^{-(t-1)^2/2}dt$

H(x)/x = 1 - $\frac{1}{x}\int_1^x e^{-(t-1)^2/2}dt$ = 1 - $\frac{1}{x}\int_0^{x-1} e^{-u^2/2}du$ en posant u = t-1.

$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{x-1} e^{-u^2/2}du = \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du = \sqrt{\pi/2}$

Il est donc évident que H(x)/x tend vers 1 quand x tend vers +∞.

Etudions la limite de H(x) – x quand x tend vers +∞.

H(x) – x = - $\int_1^x e^{-(t-1)^2/2})dt$ = – $\int_0^{x-1} e^{-u^2/2}du$

Quand x tend vers +∞, H(x) – x tend vers - $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du$ = - $\sqrt{\pi/2}$

La droite d'équation $y = x - \sqrt{\pi/2}$ est asymptote pour H au voisinage de l'infini.

17) Combien l'équation H(x) = x – 1 a-t-elle de solutions dans l'intervalle [0, 2] ?

Posons L(x) = H(x) – (x – 1)
Pour $x \leq 1$, on a vu que H(x) = x et donc L(x) = 1.
L ne peut s'annuler sur [0, 1].

Pour $1 < x \leq 2$, $L(x) = x - \int_1^x e^{-(t-1)^2/2})dt - (x-1) = 1 - \int_1^x e^{-(t-1)^2/2})dt$
$L'(x) = - e^{(x-1)^2/2}$
L est donc monotone décroissante sur]1, 2] => si L(x) = 0 a une solution sur [0, 2], elle est comprise entre 1 et 2 et elle est unique (monotonie).
Or on a :
L(1) = H(1) = 1
L(2) = H(2) – 1
D'après la question 13, on sait que H est croissante sur [1, 2] ; H(2) > H(1) = 1, donc L(2) est > 0.
On en déduit que l'équation proposée n'admet pas de racine sur l'intervalle [0, 2].

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2023

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
On appelle « différence de A et B », notée A – B, le sous-ensemble de E formé par les éléments de A qui n'appartiennent pas à B.
1) Exprimer A – B à l'aide des opérateurs $\cap$ (intersection) et ^{c} (complémentaire).

2) On prend pour E l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ; A est le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ défini par les multiples de 5, B est le sous-ensemble des entiers pairs.
Donner la forme générale des éléments de A – B.

1) $A - B = A \cap B^c$

2) $A - B = \{n \,/\, n = (2k+1).5,\ k \in \mathbb{N}\}$

Exercice 2 :

Soit un ensemble E ; sur E x E, on définit une relation binaire notée Δ.
On rappelle les propriétés possibles pour Δ :

- Réflexivité (R) : $\forall$ x $\in$ E, x Δ x
- Antisymétrie (A) : $\forall$ x et y $\in$ E, x Δ y et y Δ x => x = y
- Symétrie (S) : $\forall$ x et y $\in$ E, x Δ y => y Δ x
- Transitivité (T) : $\forall$ x, y et z $\in$ E, [x Δ y et y Δ z] => x Δ z

On prend E = $\mathbb{R}^+$ et on définit la relation Δ sur $\mathbb{R}^+$ x $\mathbb{R}^+$ par :

$$(x, y)\ \Delta\ (x', y') \Leftrightarrow xy \leq x'y'$$

1) Quelles sont les propriétés de la relation Δ ?

2) On définit la relation H par :

$$(x, y)\ H\ (x', y') \Leftrightarrow (x, y)\ \Delta\ (x', y') \text{ et } (x', y')\ \Delta\ (x, y)$$

2a) Donner la définition d'une relation d'équivalence.
2b) Montrer que H est une relation d'équivalence.

3) Application économique : un consommateur i veut utiliser la totalité d'un budget B consacré aux loisirs en consommant deux quantités x et y de deux loisirs X et Y (par exemple, sport et cinéma). Les prix unitaires de ces deux loisirs sont respectivement notés p_X et p_Y.
La fonction $f(x, y) = xy$ s'appelle la fonction de satisfaction du consommateur i.
3a) Que signifie le fait que $(x, y)\ H\ (x', y')$?
A quelle courbe appartiennent les quantités consommées x et y à satisfaction égale notée s ?

3b) Exprimer la relation liant B, x, y, p_X et p_Y.

3c) Mettre $f(x, y)$ sous la forme d'une fonction $S(x)$.

3d) Déterminer la valeur x^* de x maximisant S. Que vaut alors y^* ?

1) La relation Δ vérifie R et T (Note : ce type de relation est appelé une *relation de préordre*)

2a) Une relation d'équivalence vérifie R, S et T
2b) Trivial

3a) Le fait que les affectations (x, y) et (x', y') soient telles que $(x, y)\ H\ (x', y')$ signifie que $xy = x'y'$.
Cela revient à dire que les choix (x, y) et (x', y') faits par le consommateur lui apportent une satisfaction égale.
Tous les points (x, y) apportant une satisfaction identique s appartiennent donc à une hyperbole équilatère d'équation $xy = s$.

3b) $B = xp_X + yp_Y$, puisque le consommateur dépense tout son budget B.

3c) De la relation trouvée à la question (3b), on tire $y = (B - xp_X)/p_Y$
On en déduit que $f'x, y) = xy$ devient $S(x) = x(B - xp_X)/p_Y$

3d) $S'(x) = (B - 2xp_X)/p_Y$ (Note : $S''(x) = -2p_X/p_Y$, donc on est bien à un maximum de la satisfaction S)
$S'(x)$ s'annule en $x^* = B/2p_X$
D'où : $y^* = B/2p_Y$

Exercice 3 :

Soit f l'application de l'ensemble E dans l'ensemble F définie par :

$$f : x \in E \rightarrow f(x) = 2\,|x|$$

1) Étudier si f est une injection, une surjection, une bijection, dans chacun des quatre cas suivants :

a) $E = F = \mathbb{N}$, ensemble des entiers naturels

b) $E = F = \mathbb{Z}$, ensemble des entiers relatifs

c) $E = F = \mathbb{R}$

d) $E = \mathbb{R}^-$, $F = \mathbb{R}^+$

2) Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$g(x) = e^x$ pour $x \leq 0$

$g(x) = \sqrt{x+1}$ pour $x > 0$

2a) Étudier la continuité et la dérivabilité de g au point x = 0.

2b) Déterminer l'application h telle que :

$$(h \circ g)(x) = 2\,|x|$$

(La notation o désigne la composition de h et g : (h o g)(x) = h[g(x)])

1)

Cas a : injection, mais pas surjection (les entiers impairs n'ont pas d'antécédent)

Cas b : ni injection (fonction paire), ni surjection

Cas c : Idem que b

Cas d : Bijection

2a)

g(x) tend vers 1 quand x tend vers 0_- ; g(x) tend vers 1 quand x tend vers 0_+.

g est donc continue en 0.

$g'(x) = e^x$ qui tend vers 1 quand x tend vers 0

$g'x) = 1/(2\sqrt{x+1})$ qui tend vers 1/2 quand x tend vers 0

g n'est pas dérivable en x = 0

2b)

Pour $x \leq 0$, $y = e^x \leq 1$, et donc x = Ln y est négatif ; $h(y) = 2\,|\mathrm{Ln}\, y| = -\,2\mathrm{Ln}\, y = \mathrm{Ln}(1/y^2)$.

Pour $x > 0$, $y = \sqrt{x+1}$, $x = y^2 - 1$ pour $y > 1$

D'où $h(y) = 2(y^2 - 1)$

En synthèse :

$h(y) = \mathrm{Ln}\,(1/y^2)$ pour $y \in\,]0, 1]$

$h(y) = 2(y^2 - 1)$ pour $y > 1$

Exercice 4 :

On définit l'application linéaire f_a de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, a étant un paramètre réel, par :

$$f_a : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (2-a)x + (a-1)y \\ 2(1-a)x + (2a-1)y \\ az \end{pmatrix}$$

1) Donner la matrice M(a) représentant f_a.

2) Trouver les noyaux K(0) de f_0 et K(1) de f_1.

3) Dans la suite de l'énoncé, on prendra $a \neq 0$ et $a \neq 1$. Quel est le noyau K(a) de f_a ?

4) Montrer que M(a) peut s'écrire sous la forme A + aB où A et B sont deux matrices à déterminer.

5) Calculer AB, BA, A^2, B^2 ; donner l'expression de $M(a)^2$ en fonction de A, B et a.

6) Calculer $[M(a)]^n$ en fonction de a, où n est un entier naturel.

1)

$$M(a) = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 0 \\ 2(1-a) & 2a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

2) Cas a = 0

$2x - y = 0$

$0 = 0$

=> K(0) = {(u, 2u, v), u et v réels}

Cas a = 1 :

$x = 0$

$y = 0$

$z = 0$

K(1) est le point d'origine (0, 0, 0)

3)

$(2-a)x + (a-1)y = 0$

$2(1-a)x + (2a-1)y = 0$

$az = 0$

On remarque que les deux premières équations conduisent à $a(y-x) = 0$, d'où K(a) = {(u, u, 0)}

4) M(a) = A + aB avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Des calculs simples conduisent à AB = 0, BA = 0, $A^2 = A$, $B^2 = B$
$M(a)^2 = A^2 + aAB + aBA + a^2B^2 = A + a^2B$

6) Raisonnons par récurrence et faisons l'hypothèse que $M(a)^{n-1} = A + a^{n-1}B$.
$M(a)^n = M(a)^{n-1}.M(a) = (A + a^{n-1}B)(A + aB) = A^2 + aAB + a^{n-1}BA + a^nB^2$
$= A + a^nB$

On en déduit :

$$M(a)^n = \begin{pmatrix} 2 - a^n & a^n - 1 & 0 \\ 2(1 - a^n) & 2a^n - 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$$

Exercice 5 :

Soit un ensemble E de n éléments, $n \in \mathbb{N}$; on appelle combinaison d'ordre p ($0 \leq p \leq n$) tout sous-ensemble de E comportant p éléments. Le nombre total de combinaisons d'ordre p est égal à $\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{p} = \frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{p}!(\mathrm{n}-\mathrm{p})!}$.

1) Calculer $B = \sum_{p=0}^{p=n} \mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{p}$

2) Montrer que $\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{p} = f(n, p).\, \mathrm{C}_{\mathrm{n}-1}^{\mathrm{p}-1}$ où f(n, p) est une fonction de n et p à expliciter.

3) Calculer $S = \sum_{p=0}^{p=n} \mathrm{p}.\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{p}$

1) A partir du développement du binôme : $(1 + 1)^n = 2^n = B$

2) Immédiat à partir de la définition de $\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{p}$; f(n, p) = n/p

3) $\sum_{p=0}^{p=n} \mathrm{p}.\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{p} = \sum_{p=1}^{p=n} \mathrm{p}.\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{p}$

D'après les questions 2 et 1, $S = \sum_{p=1}^{p=n} \mathrm{n}.\mathrm{C}_{\mathrm{n}-1}^{\mathrm{p}-1} = \mathrm{n}.\sum_{p=1}^{p=n} \mathrm{C}_{\mathrm{n}-1}^{\mathrm{p}-1} = \mathrm{n}.\sum_{r=0}^{r=n-1} \mathrm{C}_{\mathrm{n}-1}^{\mathrm{r}} = \mathrm{n}.2^{n-1}$

Exercice 6 :

On considère les deux fonctions f_n et g_n, définies sur $\mathbb{R}$, par :

$f_n(x) = (1 + x)^n$
$g_n(x) = (1 - x)^n$
où n est un entier naturel.

1) Par un calcul direct, donner les expressions de leurs primitives, notées respectivement $F_n(x)$ et $G_n(x)$.

2) En développant f_n et g_n par la formule du binôme, donner deux autres expressions de $F_n(x)$ et $G_n(x)$.

3) Calculer les quantités $F_n(1) - F_n(0)$ et $G_n(1) - G_n(0)$.
En déduire la valeur de A et B où :
$A = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k+1} C_n^k$
$B = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k+1} C_n^k$

1) $F_n(x) = \int (1+x)^n dx = (1+x)^{n+1}/(n+1)$ + constante $C = C + f_{n+1}(x)/(n+1)$
De même :
$G_n(x) = \int (1-x)^n dx = -(1-x)^{n+1}/(n+1) + C' = C' - g_{n+1}(x)/(n+1)$

2) $f_n(x) = (1 + x)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k x^k$
D'où, $F_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k x^{k+1}/(k+1) + C_1$
De même :
$g_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k C_n^k x^k$
D'où, $G_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k C_n^k x^{k+1}/(k+1) + C_2$

3) $F_n(1) - F_n(0) = (2^{n+1} - 1)/(n+1) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k+1} C_n^k = A$
$G_n(1) - G_n(0) = \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k+1} C_n^k = B$