ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2024

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ de la 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est composée d'un exercice et un problème, indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice :

On rappelle qu'une suite u_n est dite monotone si elle est soit croissante, soit décroissante.
On définit la suite récurrente (u_n), où n est un entier naturel, par son premier terme u_0, avec $u_0 > 0$, et sa relation générale :

$$u_{n+1} = u_n^2$$

1) Montrer que la suite (u_n) est monotone. Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) est-elle croissante ? Décroissante ?

La suite est de façon évidente à termes positifs.

$u_{n+1} – u_n = u^2_n – u^2_{n-1} = (u_n – u_{n-1}) (u_n + u_{n-1})$

Le signe de $(u_{n+1} – u_n)$ est le même que celui de $(u_n – u_{n-1})$, puisque $(u_n + u_{n-1}) > 0$. Ainsi, par simple récurrence, $(u_{n+1} – u_n)$ a le même signe que $(u_1 – u_0)$. La suite (u_n) est monotone.

Donc si $u_1 > u_0$, $u_{n+1} > u_n$ et la suite est monotone croissante.

Et si $u_1 < u_0$, $u_{n+1} < u_n$ et la suite est monotone décroissante.

Ecrivons $u_1 – u_0 = u_0^2 – u_0 = u_0 (u_0 – 1)$.

Comme u_0 est positif strictement, le signe de $u_1 – u_0$ est celui de $(u_0 – 1)$, d'où :

- Si $u_0 > 1$, la suite (u_n) est monotone croissante
- Si $u_0 < 1$, la suite (u_n) est monotone décroissante

Cas particulier : $u_0 = 1 \rightarrow u_n = 1$ pour tout entier n, la suite est une suite constante égale à 1.

2) En déduire les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) converge et calculer sa limite.
Supposons $u_0 > 1$ et donc la suite (u_n) est monotone croissante.
Il est évident que $u_n \to +\infty$ et diverge.
Si $u_0 < 1$, la suite (u_n) est monotone décroissante ; comme $u_0 > 0$, la suite est décroissante et minorée par 0, donc convergente.
Sa limite L vérifie $L = L^2$, soit $L(L - 1) = 0$.
Comme $u_0 < 1$, la seule solution possible est L=0.

Remarque : on peut établir aussi, par récurrence, la forme générale de u_n : $u_n = u_0^{2^n}$.
Les résultats qui précèdent peuvent également s'en déduire aisément.

Problème :
Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.
On définit la fonction f_a de la variable réelle x par :

$$x \in D \to f_a(x) = (4+3x)^a,$$

où D est l'ensemble $]-4/3, +\infty[$, et a un nombre réel quelconque.

Partie I
Dans cette partie, on prend $a = 1/2$.

I.1) Calculer les dérivées première et seconde de $f_{1/2}$. Etudier leur signe.
Soit $y = f_{1/2}(x) = (4 + 3x)^{1/2}$.
$y' = 3(4 + 3x)^{-1/2}/2$
$y'' = -9(4 + 3x)^{-3/2}/4$
On déduit immédiatement que $y' > 0$ et $y'' < 0$.
La fonction $f_{1/2}$ est donc croissante et concave.

I.2) Calculer les limites de $f_{1/2}(x)$ et $f'_{1/2}(x)$ quand $x \to -4/3$.
Quand $x \to -4/3$, $f_{1/2}(x) \to 0$ et $f'_{1/2}(x) \to +\infty$.

I.3) Quelles sont les coordonnées de A, point d'intersection de $(C_{1/2})$, courbe représentant $y = f_{1/2}(x)$, et de la droite (B) d'équation $y = x$?
Donner l'équation de la tangente à la courbe $(C_{1/2})$ au point A.
Soit donc à résoudre $x = (4 + 3x)^{1/2}$, ou encore $x^2 - 3x - 4 = 0$, d'où deux solutions : $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$.
Or $f_{1/2}(x_1) = -1$, ce qui est impossible puisque $f_{1/2}$ est positive.
Donc la seule solution possible est A (4, 4).
Au point d'abscisse 4, $f'_{1/2}(4) = 3/8$.
D'où l'équation de la tangente à $C_{1/2}$ au point A est :
$(y - 4)/(x - 4) = 3/8 \rightarrow y = \frac{3x}{8} + \frac{5}{2}$

I.4) Donner le tableau de variations de $f_{1/2}$ et tracer son graphe.

x	-4/3		4		$+\infty$
f’’		–		–	
f’			+		
f	0		$\nearrow$		$+\infty$

I.5) Calculer l’intégrale $I(1/2) = \int_{-1}^{4} f_{1/2}(x)dx$.

En posant u = 4 + 3x, u varie de 1 à 16, dx = du/3, on a :

I(1/2) = $\int_{-1}^{4} f_{1/2}(x)dx$ = $\int_{1}^{16} u^{1/2}\, du/3$ = $2(16^{3/2} – 1)/9 = 2(64 – 1)/9 = 14$

Partie II

Dans cette partie, le paramètre a de la fonction $f_a(x) = (4+3x)^a$ est un nombre réel positif ou nul.

II.1) Quelles sont les courbes représentant les cas particuliers $a = 0$ et $a = 1$.

Pour a = 0, $f_0(x) = 1$, droite y = 1.

Pour a = 1, on a la droite d’équation y = $f_1(x) = 4 + 3x$.

II.2) Calculer f_a' et f_a'', respectivement dérivées première et seconde de f_a.

Etudier leur signe selon les valeurs de a.

$f'_a(x) = 3a(4 + 3x)^{a-1}$

$f''_a(x) = 9a(a-1)(4 + 3x)^{a-2}$

On en déduit :

- $f'_a(x) > 0$ pour tout a > 0
- $f''_a(x)$ est négative pour a < 1 (f_a concave) et positive pour a > 1 (f_a convexe)

(Les cas a = 0 et a = 1 ont été vus à la question 1)

II.3) Montrer que toutes les courbes (C_a) représentant les fonctions f_a passent par un point commun F dont on calculera les coordonnées (x_F, y_F). Donner l’équation de la tangente à (C_a) au point F.

On voit immédiatement que pour x = -1, $f_a(-1) = 1$; donc F est le point (- 1, 1), $x_f = -1$ et $y_F = 1$.

Tangente : (y – 1)/(x + 1) = 3a → y = 3ax + 3a + 1

II.4) Etudier les limites de $f_a(x)$ et $f'_a(x)$ quand x tend vers – 4/3 et vers + ∞.

Quand x tend vers – 4/3 :

$f_a(x) \rightarrow 0$

$f'_a(x) \rightarrow +\infty$ si a < 1 et $\rightarrow 0$ si a > 1

Quand x tend vers + ∞.

$f_a(x) \rightarrow +\infty$

$f'_a(x) \rightarrow 0$ si a < 1 et $\rightarrow +\infty$ si a > 1

II.5) Donner le tableau de variations de f_a et tracer son graphe.

On a : $\lim_{x\to+\infty} f_a(x)/x = 0$ quand a < 1 et $\lim_{x\to+\infty} f_a(x)/x = +\infty$ quand a > 1.

Deux cas à étudier : a < 1 et a > 1.

a) a < 1

x	-4/3		-1		+ ∞
f’’		–		–	
f’			+		
f	0	↗	1	↗	+ ∞

b) a > 1

x	-4/3		-1		+ ∞
f’’		+		+	
f’			+		
f	0	↗	1	↗	+ ∞

II.6) Calculer l’intégrale $I(a) = \int_{-1}^{4} f_a(x)dx$.

En posant u = 4 + 3x, on a : $I(a) = \int_{-1}^{4} f_a(x)dx = \int_{1}^{16} u^a\, du/3 = (16^{a+1} - 1)/3(a+1)$

II.7) On note, comme en Partie I, par A le point d'intersection de la droite $y = x$ avec la courbe (C_a) représentant f_a. On note (x_A, y_A) ses coordonnées.
Donner, en fonction de x_A, l'expression de l'intégrale $I_A = \int_{-1}^{x_A} f_a(x)dx$.

Toujours avec u = 4 + 3x, IA = $\int_{-1}^{x_A} f_a(x)dx$ = $\int_{1}^{4+3x_A} u^a\, du/3$ = ((4+3xA)a^{+1} – 1)/3(a+1)

Or x_A vérifie $x_A = (4 + 3x_A)^a$, ou $(x_A)^{1/a} = (4 + 3x_A)$.

Donc $I_A = ((x_A)^{(a+1)/a} - 1)/3(a+1)$

Une écriture alternative serait :

$$I_A = \int_{-1}^{x_A} f_a(x)dx = \frac{1}{3(a+1)}\left[(4+3x)^{(a+1)}\right]_{-1}^{x_A} = \frac{1}{3(a+1)}\left[(4+3x)f_a(x)\right]_{-1}^{x_A}$$

=>$I_A = \frac{1}{3(a+1)}\left((4+3x_A)x_A - 1\right)$

II.8) Soit un réel positif b tel que $b > a$. Comparer les positions respectives des courbes (C_a) et (C_b).

Calculons $f_b(x)/f_a(x)$.

$f_b(x)/f_a(x) = (4 + 3x)^{b-a}$

Ln $f_b(x)/f_a(x)$ = (b-a) Ln(4 + 3x)

Puisque b > a, le signe de Ln $f_b(x)/f_a(x)$ est celui de Ln(4 + 3x), qui est strictement positif si Ln(4+3x) > 0, c'est-à-dire 4 + 3x > 1, ou x > -1.

On conclut que pour x > -1, la courbe C_b est au-dessus de C_a, et que pour x < -1, C_b est au-dessous de C_a.

En x = -1, on a le point commun de toutes les courbes, donc pas de problème.

Partie III

Dans cette partie, on prend a réel quelconque.

III.1) Calculer la valeur de $f_a.f_{-a}$.

Pour tout a réel, et pour tout x, on a $f_a(x).f_{-a}(x) = 1$.

III.2) Calculer les expressions de f_a' et f_a'' et étudier leur signe.

On a, comme à la question II.2 :

$f'_a(x) = a(4 + 3x)^{a-1}$

$f''_a(x) = a(a-1)(4 + 3x)^{a-2}$

Signes :

$f'_a(x) < 0$ pour a < 0 et pour tout x de D.

a(a-1) > 0 pour a < 0 donc $f''_a(x) > 0$; les fonctions f_a sont convexes pour a < 0.

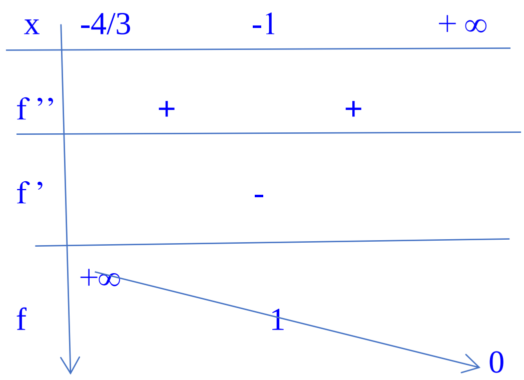
III.3) Le point F est-il aussi un point commun pour toutes les courbes (C_a), a réel ?

Oui : $f_a(-1) = 1$

III.4) Donner le tableau de variations de f_a, pour a réel.

Pour a > 1 et 0 < a < 1, les tableaux de variation ont été vus au II.5.

Pour a < 0 : on remarque que $f_a(x)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini ; la droite y = 0 est asymptote horizontale.



III.5) Tracer les fonctions $f_{-1/2}$ et f_{-1}.

Selon la question III.4, $f_{-1/2}$ est décroissante de l'infini à 0

De même pour $f_{-1}(x) = 1/(4 + 3x)$.

Partie IV

On définit la suite récurrente (u_n), n étant un entier naturel, par :

$$u_0 \ \ (u_0 > -4/3)$$

$$u_{n+1} = f_{1/2}(u_n) = \sqrt{4 + 3u_n}$$

IV.1) En supposant que la suite (u_n) admette une limite L quand $n \to +\infty$, calculer L.

L vérifie $L = (4 + 3L)^{1/2}$, ou $L^2 - 3L - 4 = 0$

Les racines sont -1 et 4.

La suite étant à termes tous positifs à partir de n = 1, L ne peut être négatif : - 1 est à exclure.

Donc si la suite (u_n) converge, L = 4

IV.2) On suppose que $u_0 < 4$. Etudier la convergence de la suite u_n.

Montrons par récurrence que $u_n<4$. $u_0<4$ est vrai par hypothèse. De plus, si $u_n<4$, alors $u_{n+1} = (4+3u_n)^{1/2} < (16)^{1/2}=4$. La récurrence est donc montrée.

On a par ailleurs $u_{n+1} - u_n = (4 + 3u_n)^{1/2} - u_n$. Cette quantité est strictement positive si et seulement si $(4 + 3u_n)^{1/2} > u_n$. Cela est toujours vrai si $u_n < 0$. Si u_n est positif, cela est vrai si et seulement si $4+3u_n>u_n^2$ ce qui est équivalent à $u_n^2-3u_n-4<0$. Or $u_n^2-3u_n-4=(u_n+1)(u_n-4)$ est strictement négatif pour tout u_n dans l'intervalle]-1,4[, donc est négatif pour u_n dans [0,4[.

On a donc ainsi dans tous les cas $u_{n+1} > u_n$ pour tout n. La suite u_n est donc croissante et majorée par 4, donc elle converge vers L = 4.

IV.3) On suppose que u_0> 4. Etudier la convergence de la suite u_n.
Comme dans la question précédente, on montre par récurrence que u_n > 4 et d'après le raisonnement effectué dans cette question, on en déduit que dans ce cas $u_{n+1} < u_n$. La suite u_n est donc décroissante et minorée par 4 ; elle est donc convergente et a pour limite 4.

IV.4) Etudier le cas u_0 = 4.
Pour tout n, u_n = 4 → suite constante.

Partie V

On définit la suite récurrente (u_n), n étant un entier naturel, par :

u_0 (u_0 > - c/d)

$$u_{n+1} = \sqrt{c + du_n}$$

où c et d sont deux paramètres vérifiant $c > 0$ et $d > 0$.

V.1) En supposant que la suite (u_n) admette une limite M quand $n \to +\infty$, calculer M.
M vérifie l'équation M = $(c + dM)^{1/2}$, ou M^2 - dM – c = 0
Les racines sont :
M(1) = $[d + (d^2 + 4c)^{1/2}]/2$
M(2) = $[d - (d^2 + 4c)^{1/2}]/2$
La suite (u_n) étant à termes tous positifs à partir de n = 1, M ne peut être négatif : la racine M(2) est à exclure. Elle est en effet négative puisque le produit des deux racines vaut -c<0, alors que M(1) est positive.
Donc, si la suite converge, la limite ne peut être que M = M(1).

V.2) On suppose que u_0 < M. Etudier la convergence de la suite u_n.
On montre par récurrence que u_n<M. Cela est vrai pour u_0 par hypothèse. De plus si u_n<M alors $u_{n+1}=(c + du_n)^{1/2} <(c + dM)^{1/2}$=M par définition de M. La récurrence est donc montrée.

Par ailleurs $u_{n+1}-u_n>0$ si et seulement si $(c + du_n)^{1/2}>u_n$. Cela est toujours vrai si $u_n<0$. Sinon, cela est vrai si et seulement si $u_n^2-du_n-c<0$ si et seulement si u_n appartient à l'intervalle [M(1),M(2)] où M(2)=M. Or dans le cas où u_n est positif, cela est toujours vrai puisque M(1)<0 et que nous avons montré que u_n<M. Nous en déduisons que $u_{n+1}-u_n>0$ pour tout n.
La suite u_n est donc croissante et majorée par M, donc elle converge vers M d'après la question V.1.

V.3) On suppose que u_0 > M. Etudier la convergence de la suite u_n.
La réponse est analogue à celle de la question V.2 (en changeant le sens des inégalités). On montre que u_n est décroissante et minorée par M, donc converge vers M (question V.1)

V.4) Etudier le cas u_0 = M.
Si u_0 = M, on a pour tout n, $u_n = u_0$ = M, suite constante.

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2024

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ de la 2$^{\text{ème}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est constituée de cinq exercices indépendants à traiter dans un ordre quelconque. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de A. En déduire une valeur propre de A.

   La troisième ligne est somme des deux premières lignes de la matrice, donc le déterminant est égal à 0. La matrice A n'est donc pas inversible et elle admet 0 comme valeur propre.

2. Calculer A^3. En déduire que A n'admet qu'une valeur propre.

   On a $A^3 = 0_3$. Soit λ une valeur propre de A et soit X un vecteur propre associé. On a $A.X = \lambda X$ donc en multipliant par A^2, on obtient $\lambda^3.X = 0$. Comme X est non nul car vecteur propre, la seule valeur propre possible pour A est 0. D'après la première question le spectre de A est donc bien $\{0\}$.

3. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

   On procède par l'absurde. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle car 0 est sa seule valeur propre. Elle serait donc nulle. C'est faux, donc A n'est pas diagonalisable.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}^n$ à l'aide des questions précédentes.

Cette matrice est $A+I_3$. Comme A et I_3 commutent, et puisque $A^3=0_3$, par la formule du binôme de Newton pour les matrices, on a

$$(A+I_3)^n = \sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}A^k$$

$$= I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1-3n-n(n-1)/2 & 4n+n(n-1)/2 & 3n+n(n-1)/2 \\ -n & 1+n & n \\ -2n-n(n-1)/2 & 3n+n(n-1)/2 & 1+2n+n(n-1)/2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

On considère deux dés à six faces équilibrés, un rouge et un blanc. On lance simultanément les deux dés jusqu'à obtenir avec le dé blanc un résultat strictement supérieur à celui du dé rouge. On note N le nombre de lancers effectués.

1. Déterminer la probabilité p d'obtenir un résultat strictement supérieur sur le dé blanc lors d'un seul lancer.

   Les 36 couples résultats (b,r) sont équiprobables. On a 15 couples tels que $6 \geq b > r \geq 1$, donc la probabilité est égale à $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

2. Rappeler la loi suivie par la variable aléatoire N et préciser son espérance.

   N est le nombre d'expériences effectuées pour obtenir un succès dans un schéma de Bernoulli de paramètre p, elle suit donc la loi géométrique de paramètre p. Son espérance est donc $E(N) = \frac{1}{p} = \frac{12}{5}$.

3. On note M le nombre de fois, parmi les N lancers, où les deux dés ont donné simultanément un 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Donner la probabilité conditionnelle que $M=k$ sachant que $N=n$, notée $P_{(N=n)}(M=k)$, suivant les valeurs de n et de k.

   Si $k>n$, cette probabilité conditionnelle est clairement nulle. Sinon, on se retrouve dans le cas de $n-1$ tirages dans un schéma de Bernoulli. A chaque tirage, les résultats possibles sont les (b,r) tels que $b \leq r$, donc on a 21 résultats possibles, équiprobables. Seul le résultat $(1,1)$ est un succès. On a donc en utilisant la loi binomiale :

$$P_{(N=n)}(M=k) = \binom{n-1}{k}\frac{20^{n-1-k}}{21^{n-1}}.$$

4. En utilisant la formule du binôme de Newton négative, assurant que si $r \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$ on a :

$$\frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}x^{n-r},$$

déterminer la loi de M.

On a $M(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a par la formule des probabilités totales, en utilisant le système complet d'événements $(N = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned} P(M = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P((M = k) \cap (N = n)) \\ &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} P((M = k) \cap (N = n)) \\ &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n-1}{k} \frac{20^{n-1-k}}{21^{n-1}} \frac{5}{12} \left(\frac{7}{12}\right)^{n-1} \\ &= \frac{5}{12} \frac{1}{36^k} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n-1}{k} \left(\frac{20}{36}\right)^{n-1-k} \\ &= \frac{5}{12} \left(\frac{1}{36}\right)^k \frac{1}{(1 - \frac{20}{36})^{k+1}} \\ &= \frac{15}{16} \frac{1}{16^k}. \end{aligned}$$

Exercice 3

On note pour tout n entier supérieur ou égal à 3 :

$$P_n(X) = X^n - X^2 + X - 1$$

1. Déterminer les racines réelles de $P_3(X)$.
   On peut écrire $P_3(X) = (X - 1)(X^2 + 1)$ donc la seule racine réelle de $P_3(X)$ est 1.

2. Montrer que $P_n(x)$ est négatif pour tout $x \in [0, 1]$.
   Soit $x \in [0, 1]$. On a $x^n - x^2 + x - 1 = x^2(x^{n-2} - 1) + x - 1$ donc $P_n(x) \leq 0$ comme somme de deux nombres négatifs.

3. Calculer $P'_n(X)$. En déduire que si n est impair alors l'unique racine réelle de $P_n(X)$ est 1.
   On a $P'_n(X) = nX^{n-1} - 2X + 1$. Donc la fonction polynomiale P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$, car dérivable de dérivée strictement positive, puisque $n-1$ est pair. Or $P_n(0) = -1$ et la fonction P_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ donc P_n est négative sur $]-\infty, 1]$ d'après la question précédente. Elle est strictement supérieure à 0 sur $]1, +\infty[$ comme somme de deux nombres strictement positifs, donc elle ne peut avoir que 1 comme racine réelle.

4. Justifier que $P_n(X)$ a exactement deux racines réelles si n est pair.
   On a $P'_n(X)$ strictement positif sur $[1, +\infty[$, ce qui se voit facilement via la décomposition $P'_n(X) = (n-2)X^{n-1} + 2X(X^{n-2} - 1) + 1$. Il est strictement négatif sur $]-\infty, -1]$ car

$nX^{n-1} < nX$ sur $]-\infty, -1]$, n étant pair, et donc

$$P_n'(X) < nX - 2X + 1 = (n-2)X + 1 \leq -n + 3 \leq 0.$$

Or $P_n(X)$ est négatif sur $[-1, 1]$. Finalement, comme P_n a pour limite $+\infty$ en $-\infty$, on en déduit par théorème de bijection continue que $P_n(X)$ a deux racines réelles si n est pair, une appartenant à $]-\infty, -1]$, l'autre égale à 1.

Exercice 4

On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit l'application T définie de E dans F par

$$T(f)(x, y) = xf(y) + yf(x)$$

1. Montrer que T est une application linéaire.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient f_1, f_2 deux fonctions de E. On a pour tous x, y de $\mathbb{R}$:

$$T(\lambda f_1 + f_2)(x, y) = x((\lambda f_1 + f_2)(y)) + y((\lambda f_1 + f_2)(x))$$

$$= x\lambda f_1(y) + xf_2(y) + y\lambda f_1(x) + yf_2(x)$$

$$= \lambda.T(f_1)(x, y) + T(f_2)(x, y)$$

   donc T est bien linéaire.

2. Soit f élément de E tel que pour tous x, y de $[0, 1]$ on ait

$$T(f)(x, y) \leq 1.$$

   Montrer qu'on a

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{4}.$$

   En appliquant les changements de variables $t = \cos(u)$ et $t = \sin(v)$, on a :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)f(\cos(u))\mathrm{d}u + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(v)f(\sin(v))\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)f(\cos(t)) + \cos(t)f(\sin(t))\mathrm{d}t.$$

   En utilisant la majoration par 1 avec $x = \sin(t)$ et $y = \cos(t)$ on obtient :

$$2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

   ce qui donne l'inégalité demandée.

3. On rappelle que l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+^*$ satisfaisant

$$\forall x, y > 0, f(xy) = f(x) + f(y)$$

est constitué des fonctions de la forme $f : x \mapsto \lambda. \ln(x)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et où on note ln la fonction logarithme népérien. Soit G l'ensemble des éléments de E tels que $T(f)(x, y) = f(xy)$ pour tout x et tout y réels.

   (a) En considérant cette dernière égalité pour $x > 0$ et $y > 0$, déterminer la forme de $f(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.
   Pour x et y strictement positifs, on a en divisant par xy :

$$\frac{f(xy)}{xy} = \frac{f(y)}{y} + \frac{f(x)}{x},$$

   donc la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ satisfait $g(xy) = g(x) + g(y)$ pour tous réels x et y strictement positifs. On peut donc affirmer que g est de la forme $g(x) = \lambda \ln(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Cela donne, pour $x > 0$:

$$f(x) = \lambda x \ln(x).$$

   Comme f est continue, et comme $x \ln(x)$ tend vers 0 en 0 par croissances comparées, on a $f(0) = 0$.

   (b) Montrer que pour tout $f \in G$ on a $f(-1) = 0$ et en déduire que f est impaire.
   On $0 = f((-1)^2) = -2f(-1)$ donc $f(-1) = 0$. Pour tout x réel on a donc

$$f(-x) = -f(x) + xf(-1) = -f(x)$$

   ce qui donne bien f impaire.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \cos(x)e^{-nx}\mathrm{d}x$$

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente.
L'intégrale est impropre en $+\infty$. On a pour x voisin de $+\infty$:

$$x^2.|\cos(x)e^{-nx}| \leq x^2.e^{-nx},$$

or $x^2.e^{-nx}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, donc $|\cos(x)e^{-nx}|$ est négligeable devant $1/x^2$ au voisinage de $+\infty$. Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ est convergente, par théorème de comparaison, l'intégrale I_n est absolument convergente, donc convergente.

2. Calculer la valeur de I_n en fonction de n et montrer que la suite (I_n) est convergente de limite nulle.

   On a par double intégration par parties (tous les termes apparaissant sont bien définis) :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\sin(x)e^{-nx}\right]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} \sin(x)e^{-nx}\mathrm{d}x \\ &= n\left(\left[-\cos(x)e^{-nx}\right]_0^{+\infty} - n\int_0^{+\infty} \cos(x)e^{-nx}\mathrm{d}x\right) \\ &= n(1-nI_n). \end{aligned}$$

   Par conséquent, on a :

$$(1+n^2)I_n = n$$

   ce qui donne $I_n = \frac{n}{1+n^2}$. On retrouve bien la limite égale à 0 quand n tend vers $+\infty$.