

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2024

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ de la 1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Dans ce problème, nous nous intéressons à des intégrales de la forme $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt$ où α est un réel strictement positif et n un entier naturel.

Partie I : Étude de cas particuliers

1. Dans cette question, traitons le cas $\alpha = 1$.

On pose pour tout entier naturel n , $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^n} dt$.

a) Déterminer les entiers naturels n pour lesquels l'intégrale u_n est convergente puis la calculer.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $\left. \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{(1+t)^n} \end{array} \right\}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et on a :

$$\frac{1}{(1+t)^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^n}$$

donc, par le critère de Riemann, u_n est un intégrale convergente si et seulement si $n > 1$, c'est-à-dire $n \geq 2$ car n est entier.

Soit $n \geq 2$. On a :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^n} dt = \left[\frac{1}{(-n+1)(1+t)^{n-1}} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n-1}.$$

b) Donner un équivalent de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

D'après la question précédente, on a : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

2. À présent, on s'intéresse au cas particulier où α est égal à 2.

On pose pour tout entier naturel n , $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

a) Déterminer les entiers naturels n pour lesquels l'intégrale v_n est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $\left. \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n} \end{array} \right\}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et on a :

$$\frac{1}{(1+t^2)^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$$

donc, par le critère de Riemann, v_n est un intégrale convergente si et seulement si $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} v_n.$$

Soit $n \geq 1$. On a, pour tout $T > 0$,

$$\int_0^T \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \int_0^T \frac{1}{(1+t^2)^n} dt - \int_0^T \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt.$$

Donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt &= -\frac{1}{2n} \int_0^T t \times \frac{(-2n) \times t}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= -\frac{1}{2n} \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^T + \frac{1}{2n} \int_0^T \frac{1}{(1+t^2)^n} dt. \end{aligned}$$

Lorsque $T \rightarrow +\infty$, les trois termes convergent donc on obtient par passage à la limite :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = 0 + \frac{v_n}{2n}.$$

Par conséquent,

$$v_{n+1} = v_n - \frac{v_n}{2n} = \frac{2n-1}{2n} v_n.$$

c) En déduire l'expression de v_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{\prod_{k=1}^n (2k)} v_1 = \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^n (2k)} \frac{1}{\prod_{k=1}^n (2k)} v_1 = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} v_1.$$

Puisque,

$$v_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2},$$

on en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \pi$.

d) On rappelle la formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

Déterminer alors un équivalent de v_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

On a, d'après la formule de Stirling,

$$v_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{2^{2n+1} n^{2n} e^{-2n} (2\pi n)} \pi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} n^{-\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} (n-1)^{-\frac{1}{2}}$ donc $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} n^{-\frac{1}{2}}$.

Partie II : Étude du cas $n = 1$

Dans cette partie, on pose pour tout réel strictement positif α , $K(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt$.

3. Déterminer l'ensemble des réels strictement positifs α tels que $K(\alpha)$ soit une intégrale convergente.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha} \end{array} \right.$ est continue sur \mathbb{R}_+ et on a : $\frac{1}{1+t^\alpha} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$

donc, par le critère de Riemann, $K(\alpha)$ est un intégrale convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Dans la suite de ce problème, on fixe un réel α strictement supérieur à 1.

4. Démontrer que :

$$K(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt + \int_0^1 \frac{t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha} dt.$$

La fonction $\varphi : \left[\begin{array}{l} [1, +\infty[\rightarrow]0, 1] \\ t \mapsto \frac{1}{t} \end{array} \right.$ est bijective, strictement décroissante et de classe \mathcal{C}^1

donc on a par le théorème du changement de variable :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt &= - \int_1^{+\infty} \frac{t^{-\alpha} t^2}{t^{-\alpha} + 1} \frac{(-1)}{t^2} dt \\ &= - \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)^{\alpha-2}}{1+\varphi(t)^\alpha} \varphi'(t) dt \\ &= - \int_1^0 \frac{u^{\alpha-2}}{1+u^\alpha} du \\ &= \int_0^1 \frac{u^{\alpha-2}}{1+u^\alpha} du. \end{aligned}$$

Donc, on obtient par la relation de Chasles : $K(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt + \int_0^1 \frac{t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha} dt.$

5. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\alpha k + 1} + R_n \quad \text{avec} \quad |R_n| \leq \frac{1}{\alpha(n+1) + 1}.$$

On pourra appuyer le raisonnement sur l'étude de la somme $\sum_{k=0}^n (-t^\alpha)^k$ pour $t \in [0, 1]$.

On a pour tout $t \in [0, 1]$, $\sum_{k=0}^n (-t^\alpha)^k = \frac{1 - (-t^\alpha)^{n+1}}{1 + t^\alpha}.$

Donc,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-t^\alpha)^k dt + \int_0^1 \frac{(-t^\alpha)^{n+1}}{1+t^\alpha} dt.$$

D'une part,

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^n (-t^\alpha)^k dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{\alpha k} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\alpha k + 1}$$

par linéarité de l'intégrale. Et, d'autre part,

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t^\alpha)^{n+1}}{1+t^\alpha} dt \right| \leq \int_0^1 t^{\alpha(n+1)} dt = \frac{1}{\alpha(n+1) + 1}.$$

Donc,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\alpha k + 1} + R_n \quad \text{avec} \quad |R_n| \leq \frac{1}{\alpha(n+1) + 1}.$$

6. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha} dt = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha k - 1} + S_n \quad \text{avec} \quad |S_n| \leq \frac{1}{\alpha(n+1) - 1}.$$

On a pour tout $t \in [0, 1]$, $t^{-2} \sum_{k=1}^n (-t^\alpha)^k = t^{-2} \left(\frac{-t^\alpha - (-t^\alpha)^{n+1}}{1+t^\alpha} \right) = \frac{-t^{\alpha-2} - t^{-2} (-t^\alpha)^{n+1}}{1+t^\alpha}.$

Donc,

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha} dt = - \int_0^1 t^{-2} \sum_{k=1}^n (-t^\alpha)^k dt - \int_0^1 \frac{t^{-2} (-t^\alpha)^{n+1}}{1+t^\alpha} dt.$$

D'une part,

$$- \int_0^1 t^{-2} \sum_{k=1}^n (-t^\alpha)^k dt = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{\alpha k - 2} dt = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha k - 1}$$

par linéarité de l'intégrale. Et, d'autre part,

$$\left| - \int_0^1 \frac{t^{-2} (-t^\alpha)^{n+1}}{1+t^\alpha} dt \right| \leq \int_0^1 t^{\alpha(n+1)-2} dt = \frac{1}{\alpha(n+1) - 1}.$$

Donc,

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha} dt = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha k - 1} + S_n \quad \text{avec} \quad |S_n| \leq \frac{1}{\alpha(n+1) - 1}.$$

7. Exprimer alors $K(\alpha)$ sous la forme d'une série convergente.

D'après les questions 4., 5. et 6. on a pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} K(\alpha) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\alpha k + 1} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha k - 1} + S_n + R_n \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{(-1)^k}{\alpha k + 1} + \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha k - 1} \right) + S_n + R_n \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{1 - \alpha^2 k^2} + S_n + R_n. \end{aligned}$$

Or, on a $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc la somme converge et on a en passant à la limite :

$$K(\alpha) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1 - \alpha^2 k^2}.$$

8. Soit λ un nombre réel non nul.

On considère la fonction 2π -périodique f définie sur \mathbb{R} et dont la restriction à $[-\pi, \pi[$ est donnée par :

$$\left[\begin{array}{l} [-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \cos(\lambda t) \end{array} \right. .$$

a) Déterminer les coefficients de Fourier réels de la fonction f .

Montrons tout d'abord que la fonction f est une fonction continue sur \mathbb{R} . f est continue sur $[-\pi, \pi[$. De plus, $\lim_{t \rightarrow \pi^-} \cos(\lambda t) = \cos(\lambda\pi)$ et par 2π -périodicité de f ,

$$\lim_{t \rightarrow \pi^+} \cos(\lambda t) = \lim_{t \rightarrow -\pi^+} \cos(\lambda t) = \cos(-\lambda\pi) = \cos(\lambda\pi).$$

Donc f est continue en π puis en $\pi + 2k\pi$ pour tout entier k par 2π -périodicité. Ainsi, f est continue sur \mathbb{R} .

Ses coefficients de Fourier réels sont donnés par :

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda t) dt = \frac{1}{2\pi\lambda} [\sin(\lambda t)]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda\pi},$$

et pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos((\lambda + n)t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos((\lambda - n)t) dt \quad (\text{par parité de la fonction cos}) \\ &= \frac{1}{\pi(\lambda + n)} \sin((\lambda + n)\pi) + \frac{1}{\pi(\lambda - n)} \sin((\lambda - n)\pi) \\ &= \frac{(-1)^n \sin(\lambda\pi)}{\pi(\lambda + n)} + \frac{(-1)^n \sin(\lambda\pi)}{\pi(\lambda - n)} \\ &= \frac{2\lambda \sin(\lambda\pi)}{\pi} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - n^2}, \end{aligned}$$

et,

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda t) \sin(nt) dt = 0$$

car la fonction intégrée est impaire.

b) Étudier la convergence de la série de Fourier de f et en déduire la valeur de la somme :

$$1 + 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - n^2}.$$

f est continue et de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} donc, d'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge normalement donc converge simplement vers f . En particulier,

$$f(0) = \frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\lambda \sin(\lambda\pi)}{\pi} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - n^2} \cos(n \times 0).$$

D'où :

$$1 = \frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\lambda \sin(\lambda\pi)}{\pi} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - n^2}.$$

Or,

$$1 + 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - n^2} = \frac{\lambda\pi}{\sin(\lambda\pi)} \left(\frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\lambda \sin(\lambda\pi)}{\pi} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - n^2} \right).$$

$$\text{Donc : } 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - n^2} = \frac{\lambda\pi}{\sin(\lambda\pi)}.$$

9. Montrer que : $K(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$.

On a par 7. et par 8. :

$$K(\alpha) = 1 + \frac{2}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\frac{1}{\alpha^2} - k^2} = \frac{\pi}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}.$$

10. Retrouver le résultat pour le cas $\alpha = 2$.

On a bien

$$K(2) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Partie III : Calcul d'un équivalent dans le cas général

Dans cette partie, nous allons déterminer un équivalent de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Posons donc, pour $\alpha > 1$ fixé, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt$.

11. Déterminer les entiers naturels n tels que I_n soit une intégrale convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $\left. \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} \end{array} \right\}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et on a :

$$\frac{1}{(1+t^\alpha)^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha n}}$$

donc, par le critère de Riemann, I_n est une intégrale convergente si et seulement si $\alpha n > 1$
donc si et seulement si $n \geq 1$.

12. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = \frac{n\alpha - 1}{n\alpha} I_n$.

Soit $n \geq 1$. Les intégrales suivantes sont convergentes donc on a :

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n+1}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}} dt.$$

Or, on a pour tout $T > 0$ par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}} dt &= -\frac{1}{n\alpha} \int_0^T t \frac{(-n)\alpha t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^{n+1}} dt \\ &= -\frac{1}{n\alpha} \left[\frac{t}{(1+t^\alpha)^n} \right]_0^T + \frac{1}{n\alpha} \int_0^T \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt. \end{aligned}$$

Les trois termes convergent lorsque $T \rightarrow +\infty$ donc, on obtient par passage à la limite :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}} dt = 0 + \frac{1}{n\alpha} I_n.$$

$$\text{Ainsi, } I_{n+1} = I_n - \frac{1}{n\alpha} I_n = \frac{n\alpha - 1}{n\alpha} I_n.$$

13. a) Justifier que pour tout $n \geq 1$, on a $I_n > 0$.

La fonction intégrée est continue et strictement positive sur \mathbb{R}_+ donc $I_n > 0$.

On pose alors pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $z_n = \ln(I_n) + \frac{1}{\alpha} \ln(n)$.

b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (z_{n+1} - z_n)$ est convergente.

Soit $n \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned} z_{n+1} - z_n &= \ln\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right) + \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{n\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{n\alpha} - \frac{1}{2n^2\alpha^2} + \frac{1}{n\alpha} - \frac{1}{2\alpha n^2} + o_{n \rightarrow \infty}(n^{-2}) \\ &= -\frac{1+\alpha}{2\alpha^2} n^{-2} + o_{n \rightarrow \infty}(n^{-2}). \end{aligned}$$

Donc la série de terme général $(z_{n+1} - z_n)_{n \geq 1}$ converge par comparaison à une série convergente à termes négatifs.

c) En déduire l'existence d'un réel L strictement positif tel que : $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} L n^{-\frac{1}{\alpha}}$.

Tout d'abord, montrons que la suite $(z_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

On a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $z_n - z_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (z_{k+1} - z_k)$. Comme

la série $\sum_{n \geq 1} (z_{n+1} - z_n)$ est convergente, on en déduit que $(z_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite

$l \in \mathbb{R}$. Donc,

$$I_n = \exp\left(z_n - \frac{1}{\alpha} \ln(n)\right) = e^{z_n} \exp\left(\ln(n^{-\frac{1}{\alpha}})\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^l n^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

En notant $L = e^l$ on a bien, $L > 0$ et $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} L n^{-\frac{1}{\alpha}}$.

À présent, nous allons calculer la valeur de L . Pour ce faire, posons pour tout $n \geq 1$, $J_n = n^{\frac{1}{\alpha}} I_n$.

14. a) Montrer que pour tout réel positif t on a l'encadrement : $t - t^2 \leq \ln(1 + t) \leq t$.

La fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t - \ln(1 + t) \end{cases}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ de dérivée donnée par

$g'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. g est donc croissante sur \mathbb{R}_+ et on a $g(0) = 0$ donc pour tout réel positif t , $\ln(1 + t) \leq t$.

De même, la fonction $h : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln(1 + t) - t + t^2 \end{cases}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ de dérivée

donnée par $h'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 + 2t = \frac{t(2t+1)}{t+1} \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. h est donc croissante sur \mathbb{R}_+ et on a $h(0) = 0$ donc pour tout réel positif t , $\ln(1 + t) \geq t - t^2$.

b) On rappelle que la fonction Γ est définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $\frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq J_n$.

Soit $n \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned} J_n &= n^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{+\infty} \exp(-n \ln(1 + t^\alpha)) dt \\ &\geq n^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{+\infty} \exp(-nt^\alpha) dt \quad (\text{par 13.a}) \\ &= n^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{+\infty} \exp(-u) \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}} du \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \exp(-u) u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \\ &= \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

où l'on a appliqué le théorème du changement de variable en posant $u = \varphi(t)$ avec $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ t \mapsto nt^\alpha \end{cases}$ qui est une bijection de classe \mathcal{C}^1 .

c) Démontrer que :

$$J_n \leq \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(1 + n^{-\frac{3}{4}}\right)^n} + \frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{n\alpha - 1}.$$

On pourra commencer par décomposer l'intégrale I_n de la manière suivante :

$$I_n = \int_0^{n^{-\frac{3}{4\alpha}}} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt + \int_{n^{-\frac{3}{4\alpha}}}^1 \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt.$$

En premier lieu,

$$\begin{aligned}
n^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{n^{-\frac{3}{4\alpha}}} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt &= n^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{n^{-\frac{3}{4\alpha}}} \exp(-n \ln(1+t^\alpha)) dt \\
&\leq n^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{n^{-\frac{3}{4\alpha}}} \exp(-nt^\alpha) \exp(nt^{2\alpha}) dt \quad (\text{par 13.a}) \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_0^{n^{\frac{1}{4}}} e^{-u} e^{\frac{u^2}{n}} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du,
\end{aligned}$$

où l'on a appliqué le théorème du changement de variable en posant $u = \psi(t)$ avec $\psi : \begin{cases} [0, n^{-\frac{3}{4\alpha}}] \rightarrow [0, n^{\frac{1}{4}}] \\ t \mapsto nt^\alpha \end{cases}$ qui est une bijection de classe \mathcal{C}^1 .

De plus, on a pour tout $u \in [0, n^{\frac{1}{4}}]$, $e^{\frac{u^2}{n}} \leq e^{\frac{\sqrt{n}}{n}}$. Par conséquent,

$$n^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{n^{-\frac{3}{4\alpha}}} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt \leq \frac{1}{\alpha} e^{\frac{\sqrt{n}}{n}} \int_0^{n^{\frac{1}{4}}} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \leq \frac{1}{\alpha} e^{\frac{\sqrt{n}}{n}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du = \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Ensuite,

$$n^{\frac{1}{\alpha}} \int_{n^{-\frac{3}{4\alpha}}}^1 \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt \leq n^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{\left(1+n^{-\frac{3}{4}}\right)^n} (1 - n^{-\frac{3}{4}}) \leq \frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(1+n^{-\frac{3}{4}}\right)^n}.$$

Enfin,

$$n^{\frac{1}{\alpha}} \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt \leq n^{\frac{1}{\alpha}} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n\alpha}} dt = n^{\frac{1}{\alpha}} \left[\frac{t^{-n\alpha+1}}{-n\alpha+1} \right]_1^{+\infty} = \frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{n\alpha-1}.$$

Par conséquent, nous avons prouvé :

$$J_n \leq \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(1+n^{-\frac{3}{4}}\right)^n} + \frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{n\alpha-1}.$$

d) Démontrer que :

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) n^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

On a tout d'abord, $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$. Ensuite, on a par la question 13.a),

$$\frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(1+n^{-\frac{3}{4}}\right)^n} = \exp\left(\frac{\ln(n)}{\alpha} - n \ln(1+n^{-\frac{3}{4}})\right) \leq \exp\left(\frac{\ln(n)}{\alpha} - n^{\frac{1}{4}} + n^{-\frac{1}{2}}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Enfin,

$$\frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{n\alpha - 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{car } \alpha > 1).$$

Donc, d'après le lemme des gendarmes, on obtient avec les questions 13. b) et 13. c),

$$J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

En conclusion,

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) n^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

2 Problème d'algèbre

Notations

Dans ce problème, nous utiliserons les notations suivantes :

- \mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels.
- \mathbb{Z} désigne l'ensemble des entiers relatifs.
- Pour tout entier naturel n , $\llbracket 0, n \rrbracket$ désigne l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid 0 \leq k \leq n\}$.
- Pour deux entiers naturels n et p , on note $\binom{n}{p}$ l'entier défini par $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ lorsque $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\binom{n}{p} = 0$ lorsque $p > n$.
- $\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, muni des lois $+$ et \cdot usuelles.
- Pour n un entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé par les polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Soit E un espace vectoriel. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

On définit $Id_E : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x \end{cases}$ et $0_{\mathcal{L}(E)} : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & 0_E \end{cases}$ où 0_E désigne le vecteur nul de E .

Pour toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit par récurrence l'endomorphisme u^n pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u^0 = Id_E \\ u^n = u^{n-1} \circ u & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Partie I : Étude de la dérivation discrète

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que $\Delta : P \mapsto \Delta(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}[X]$ et λ un réel. On a :

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda P + Q)(X) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= (\lambda P(X) - \lambda P(X+1)) + (Q(X) - Q(X+1)) \\ &= [\lambda \Delta(P) + \Delta(Q)](X). \end{aligned}$$

Donc Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Déterminer le noyau de Δ .

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $\deg(P) \geq 1$, alors $\Delta(P) \neq 0$. Et, si $\deg(P) = 0$, alors $\Delta(P) = 0$.

Par suite, $\text{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$.

3. Soit $n \geq 0$. On note Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$. Démontrer que Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarquons que pour tout $p \geq 1$,

$$\Delta(X^p) = (X+1)^p - X^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} X^k - X^p = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} X^k.$$

Donc $\Delta(X^p)$ est un polynôme de terme de plus haut degré égal à pX^{p-1} . Par conséquent, si $P(X) = \sum_{p=0}^n a_p X^p$ est un polynôme de degré n , c'est-à-dire $a_n \neq 0$, alors $\Delta(P)$ est un polynôme de degré $n-1$ exactement.

Ainsi, $\Delta_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ et Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$. On note, $\tilde{\Delta}$ la restriction de Δ à F et pour tout $n \geq 1$, on note $\tilde{\Delta}_n$ la restriction de Δ_n à $\mathbb{R}_n[X] \cap F$.

- a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

F contient le polynôme nul. De plus, si $P \in F$, $Q \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda P(0) + Q(0) = 0$ donc $\lambda P + Q \in F$ et ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

- b) Soit $n \geq 1$. Montrer que $\tilde{\Delta}_n$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X] \cap F$ sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Tout d'abord, $\tilde{\Delta}_n$ est injective sur $\mathbb{R}_n[X] \cap F$ car $\text{Ker}(\tilde{\Delta}_n) = \text{Ker}(\Delta) \cap \mathbb{R}_n[X] \cap F = \mathbb{R}_0[X] \cap F$ et le seul polynôme constant vérifiant $P(0) = 0$ est le polynôme nul.

De plus, $\mathbb{R}_n[X] \cap F$ est le noyau de la forme linéaire $\left. \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto P(0) \end{array} \right\}$ donc c'est un

hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi, $\dim(\mathbb{R}_n[X] \cap F) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - 1 = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ donc $\tilde{\Delta}_n$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X] \cap F$ sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

- c) En déduire que $\tilde{\Delta}$ est un isomorphisme de F sur $\mathbb{R}[X]$.

Tout d'abord, on a $\text{Ker}(\tilde{\Delta}) = \text{Ker}(\Delta) \cap F = \mathbb{R}_0[X] \cap F = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ donc $\tilde{\Delta}$ est injective. De plus, soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. En notant $n = \deg(Q)$, on a $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ donc il existe

$P \in \mathbb{R}_n[X] \cap F$ tel que $\tilde{\Delta}_n(P) = Q$. Dans ce cas, $P \in F$ et $\tilde{\Delta}(P) = Q$ donc $\tilde{\Delta}$ est surjective.

Ainsi, $\tilde{\Delta}$ est un isomorphisme de F sur $\mathbb{R}[X]$.

5. Soit $G = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\}$. On note, $\hat{\Delta}$ la restriction de Δ à G .

- a) Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

G contient le polynôme nul. De plus, si $P \in G$, $Q \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_0^1 (\lambda P + Q)(t) dt = \lambda \int_0^1 P(t) dt + \int_0^1 Q(t) dt = 0,$$

donc $\lambda P + Q \in G$ et ainsi G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

b) Démontrer que $\hat{\Delta}$ est un isomorphisme de G sur $\mathbb{R}[X]$.

Pour tout $n \geq 1$, on note $\hat{\Delta}_n$ la restriction de Δ_n à $\mathbb{R}_n[X] \cap G$. Commençons par montrer que $\hat{\Delta}_n$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X] \cap G$ sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Tout d'abord, $\hat{\Delta}_n$ est injective sur $\mathbb{R}_n[X] \cap G$ car $\text{Ker}(\hat{\Delta}_n) = \text{Ker}(\Delta) \cap \mathbb{R}_n[X] \cap G = \mathbb{R}_0[X] \cap G$ et le seul polynôme constant vérifiant $\int_0^1 P(t) dt = 0$ est le polynôme nul.

De plus, $\mathbb{R}_n[X] \cap G$ est le noyau de la forme linéaire

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto \int_0^1 P(t) dt \end{array} \quad \text{donc c'est}$$

un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi, $\dim(\mathbb{R}_n[X] \cap G) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - 1 = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ donc $\hat{\Delta}_n$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X] \cap G$ sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

À présent, montrons que $\hat{\Delta}$ est un isomorphisme de G sur $\mathbb{R}[X]$.

On a : $\text{Ker}(\hat{\Delta}) = \text{Ker}(\Delta) \cap G = \mathbb{R}_0[X] \cap G = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ donc $\hat{\Delta}$ est injective.

De plus, soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. En notant $n = \deg(Q)$, on a $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ donc il existe

$P \in \mathbb{R}_n[X] \cap G$ tel que $\hat{\Delta}_n(P) = Q$. Dans ce cas, $P \in G$ et $\hat{\Delta}(P) = Q$ donc $\hat{\Delta}$ est surjective.

Ainsi, $\hat{\Delta}$ est un isomorphisme de G sur $\mathbb{R}[X]$.

6. Pour P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\Delta(Q) = P$, on dira que P est la dérivée discrète de Q et que Q est une primitive discrète de P .

a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Justifier l'existence d'une primitive discrète de P .

D'après la question 3., il existe $Q \in F$ tel que $\Delta(Q) = P$ donc P admet bien une primitive discrète.

b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et Q_0 une primitive discrète de P . Déterminer l'ensemble des primitives discrètes de P .

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$\Delta(Q) = P \Leftrightarrow \Delta(Q) = \Delta(Q_0) \Leftrightarrow \Delta(Q - Q_0) = 0 \Leftrightarrow Q - Q_0 \in \text{Ker}(\Delta) \Leftrightarrow Q - Q_0 \in \mathbb{R}_0[X],$$

car le noyau de Δ est constitué des polynômes constants. Ainsi, l'ensemble des primitives discrètes de P est $\{Q_0 + c \mid c \in \mathbb{R}\}$.

c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et Q une primitive discrète de P . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^n P(k) = Q(n+1) - Q(0).$$

On a $\Delta(Q) = P$, c'est-à-dire $Q(X+1) - Q(X) = P(X)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n P(k) = \sum_{k=0}^n (Q(k+1) - Q(k)) = Q(n+1) - Q(0).$$

d) Soit n un entier naturel. Utiliser la formule précédente pour déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^n k$.

Posons $P(X) = X$ et $Q(X) = \frac{X(X-1)}{2}$. Alors $Q(X+1) - Q(X) = X = P(X)$ donc Q est une primitive discrète de P . Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=0}^n P(k) = Q(n+1) - Q(0) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Partie II : Les polynômes de Hilbert

7. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(H_p)_{p \in \mathbb{N}}$, appelés polynômes de Hilbert, tels que :

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ \Delta(H_p) = H_{p-1}, \text{ pour } p \geq 1 \\ H_p(0) = 0, \text{ pour } p \geq 1 \end{cases}$$

Démontrons par récurrence sur $p \geq 0$ l'existence et l'unicité d'une telle suite de polynômes. Tout d'abord, $H_0 = 1$ est défini de manière unique. Supposons qu'il existe un rang $p \geq 0$ pour lequel H_p soit défini de manière unique. On sait, d'après la question 3., que H_p admet un unique antécédent H_{p+1} par Δ qui s'annule en 0. Alors H_{p+1} existe et est unique. Donc la suite $(H_p)_{p \geq 0}$ est bien définie de manière unique.

8. Soit n un entier naturel. Démontrer que la famille $(H_p)_{0 \leq p \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Nous avons prouvé en question 2 que pour tout polynôme P , le degré de $\Delta(P)$ vaut $\deg(P) - 1$. Par conséquent, la famille $(H_p)_{0 \leq p \leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ comme famille de polynômes non nuls échelonnés en degrés à $n+1$ éléments. Donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

9. Montrer que pour tout entier naturel non nul p on a :

$$H_p(X) = \frac{1}{p!} \prod_{k=0}^{p-1} (X - k).$$

Introduisons la suite de polynômes $(K_p)_{p \geq 0}$ définie par $K_0 = 1$ et $K_p(X) = \frac{1}{p!} \prod_{k=0}^{p-1} (X - k)$ pour tout $p \geq 1$. Pour démontrer que $K_p = H_p$ pour tout entier naturel p , il suffit de vérifier que la suite de polynômes $(K_p)_{p \geq 0}$ vérifie les trois conditions données en question 6. puisqu'il y a unicité d'une telle famille.

Tout d'abord, $K_0 = 1$ et on a bien $K_p(0) = 0$ pour tout $p \geq 1$.

Ensuite, on a : $\Delta(K_1)(X) = X + 1 - X = K_0(X)$ et pour $p \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\Delta(K_p)(X) &= K_p(X+1) - K_p(X) \\
&= \frac{1}{p!} \prod_{k=0}^{p-1} (X+1-k) - \frac{1}{p!} \prod_{k=0}^{p-1} (X-k) \\
&= \frac{1}{p!} \prod_{k=0}^{p-1} (X-(k-1)) - \frac{1}{p!} \prod_{k=0}^{p-1} (X-k) \\
&= \frac{1}{p!} (X+1) \prod_{j=0}^{p-2} (X-j) - \frac{1}{p!} \prod_{k=0}^{p-1} (X-k) \quad (\text{en posant } j = k-1) \\
&= \frac{1}{p!} \prod_{j=0}^{p-2} (X-j) \times (X+1 - (X - (p-1))) \\
&= \frac{1}{(p-1)!} \prod_{j=0}^{p-2} (X-j) \\
&= K_{p-1}(X).
\end{aligned}$$

Ainsi, $K_p = H_p$ pour tout entier naturel p donc on a bien pour tout $p \geq 1$,

$$H_p(X) = \frac{1}{p!} \prod_{k=0}^{p-1} (X-k).$$

10. Démontrer que pour tout entier naturel n et tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$P(X) = \sum_{i=0}^n \Delta^i(P)(0) H_i(X).$$

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, si $\deg(P) = 0$, alors

$$P(X) = P(0) = \Delta^0 P(0) H_0(X).$$

Supposons qu'il existe un rang $n \geq 0$ tel que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on ait

$P(X) = \sum_{k=0}^n \Delta^k(P)(0) H_k(X)$. Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Alors $\Delta(Q)$ est de degré n donc :

$$\Delta(Q)(X) = \sum_{k=0}^n \Delta^k(\Delta(Q))(0) H_k(X).$$

D'après la définition des polynômes de Hilbert, on en déduit que $\sum_{k=0}^n \Delta^k(\Delta(Q))(0) H_{k+1}$ est une primitive discrète de $\Delta(Q)$. Donc, d'après la question 5.,

$$Q(X) = Q(0) + \sum_{k=0}^n \Delta^{k+1}(Q)(0) H_{k+1}(X) = \sum_{k=0}^{n+1} \Delta^k(Q)(0) H_k(X).$$

Nous avons démontré que pour tout entier naturel n et tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$P(X) = \sum_{i=0}^n \Delta^i(P)(0)H_i(X).$$

11. a) Montrer que pour tout entier naturel i on a :

$$\Delta^i(P)(X) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} P(X+k).$$

On procède par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$. Tout d'abord,

$$\Delta^0(P)(X) = P(X) = \sum_{k=0}^0 (-1)^{0-k} P(X+k).$$

Supposons que l'égalité soit vérifiée pour un certain rang $i \geq 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \Delta^{i+1}(P)(X) &= \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \Delta(P)(X+k) \quad (\text{par linéarité}) \\ &= \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} P(X+k+1) - \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} P(X+k) \\ &= \sum_{k=1}^{i+1} (-1)^{i+1-k} \binom{i}{k-1} P(X+k) + \sum_{k=0}^i (-1)^{i+1-k} \binom{i}{k} P(X+k) \\ &= \sum_{k=1}^i (-1)^{i+1-k} \binom{i+1}{k} P(X+k) + (-1)^{i+1} \binom{i}{0} P(X) + (-1)^0 \binom{i}{i} P(X+i+1) \\ &\quad (\text{par le triangle de Pascal}) \\ &= \sum_{k=1}^i (-1)^{i+1-k} \binom{i+1}{k} P(X+k) + (-1)^{i+1} \binom{i+1}{0} P(X) + (-1)^0 \binom{i+1}{i+1} P(X+i+1) \\ &= \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^{i+1-k} \binom{i+1}{k} P(X+k). \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier naturel i on a :

$$\Delta^i(P)(X) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} P(X+k).$$

b) Soit n un entier naturel. En déduire, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, l'expression de P dans la base $(H_p)_{0 \leq p \leq n}$ en fonction de $\{P(k), 0 \leq k \leq n\}$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$P(X) = \sum_{i=0}^n \Delta^i(P)(0) H_i(X) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} P(j) \right) H_i(X).$$

c) Soit n un entier naturel et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Démontrer la proposition suivante :

$$[\forall k \in \mathbb{Z}, P(k) \in \mathbb{Z}] \Leftrightarrow [\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(k) \in \mathbb{Z}].$$

L'implication directe est vérifiée. Supposons que $P(k) \in \mathbb{Z}$ pour tout $0 \leq k \leq n$. Soit $q \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$P(q) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P(j) \right) H_k(q).$$

On a, par hypothèse, $P(j) \in \mathbb{Z}$ pour tout j compris entre 0 et n . De plus, pour tout $0 \leq i \leq n$,

$$H_k(q) = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (q-j) = \frac{q!}{k!(q-k)!} = \binom{q}{k} \in \mathbb{N}.$$

Donc, $P(q) \in \mathbb{Z}$.

12. Dans cette question, on introduit pour deux entiers naturels non nuls n et p la somme $S_n(p) = \sum_{k=0}^n k^p$. Également, pour tous entiers naturels r et s on appelle nombre de Stirling la quantité :

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} \right\} = \frac{1}{s!} \sum_{t=0}^s (-1)^{s-t} \binom{s}{t} t^r$$

avec la convention $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1$.

a) Montrer que pour tous entiers naturels non nuls n et p , on a : $S_n(p) = \sum_{i=0}^p i! \left\{ \begin{matrix} p \\ i \end{matrix} \right\} \binom{n+1}{i+1}$.

On a d'après la question 10.b), avec $P(X) = X^p$,

$$X^p = \sum_{i=0}^p \left(\sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} j^p \right) H_i(X) = \sum_{i=0}^p i! \left\{ \begin{matrix} p \\ i \end{matrix} \right\} H_i(X).$$

Donc pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$k^p = \sum_{i=0}^p i! \left\{ \begin{matrix} p \\ i \end{matrix} \right\} H_i(k).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
S_n(p) &= \sum_{i=0}^p i! \left\{ \begin{matrix} p \\ i \end{matrix} \right\} \sum_{k=0}^n H_i(k) \\
&= \sum_{i=0}^p i! \left\{ \begin{matrix} p \\ i \end{matrix} \right\} (H_{i+1}(n+1) - 0) \quad (\text{d'après 5.c}) \\
&= \sum_{i=0}^p i! \left\{ \begin{matrix} p \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\prod_{k=0}^i (n+1-k)}{(i+1)!} \quad (\text{par la question 8.}) \\
&= \sum_{i=0}^p i! \left\{ \begin{matrix} p \\ i \end{matrix} \right\} \binom{n+1}{i+1}.
\end{aligned}$$

b) En déduire l'expression de $S_n(2)$ et de $S_n(3)$ en fonction de l'entier naturel non nul n .

On trouve $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$, $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1$ et $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 1$ donc pour tout $n \geq 1$,

$$S_n(2) = \binom{n+1}{2} + 2 \binom{n+1}{3} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n-1)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On trouve également, $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$, $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1$, $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 3$ et $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right\} = 1$ donc pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
S_n(3) &= \binom{n+1}{2} + 6 \binom{n+1}{3} + 6 \binom{n+1}{4} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + n(n+1)(n-1) + \frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{4} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Partie III : Les polynômes de Bernoulli

13. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, appelés polynômes de Bernoulli, tels que :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \Delta(B_n) = nX^{n-1}, \text{ pour } n \geq 1 \\ \int_0^1 B_n(t) dt = 0, \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Soit $n \geq 1$. On sait, d'après la question 4., que nX^{n-1} admet un unique antécédent B_n par Δ qui appartient au sous-espace vectoriel G , c'est-à-dire que $\int_0^1 B_n(t) dt = 0$.

14. a) Soit $n \geq 1$. Déterminer le degré de B_n .
 On a : $\deg(nX^{n-1}) = n - 1 = \deg(\Delta(B_n)) = \deg(B_n) - 1$. Donc, $\deg(B_n) = n$.
- b) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $B_n(1) = B_n(0)$.
 On a d'une part, $\Delta(B_n)(0) = B_n(1) - B_n(0)$ et, d'autre part, $\Delta(B_n)(0) = n0^{n-1} = 0$ car $n - 1 \geq 1$. Ainsi, $B_n(1) = B_n(0)$ pour tout $n \geq 2$.

15. On introduit l'application $d : \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{array}$ où P' désigne le polynôme dérivé de P .

- a) Vérifier que d est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui commute avec Δ .
 La linéarité de l'application d est donnée par la linéarité de la dérivation. De plus, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$:

$$(\Delta \circ d)(P)(X) = P'(X+1) - P'(X) = \Delta(P)'(X) = (d \circ \Delta)(P)(X).$$

- b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $(d(B_n) - nB_{n-1}) \in \text{Ker}(\Delta)$.

D'après la question précédente on a pour $n \geq 2$:

$$\Delta(d(B_n) - nB_{n-1})(X) = d(nX^{n-1}) - n\Delta(B_{n-1})(X) = n(n-1)X^{n-2} - n(n-1)X^{n-2} = 0.$$

Pour $n = 1$, on a $\Delta(d(B_1) - B_0)(X) = d(\Delta(B_1))(X) - \Delta(B_0)(X) = (d(1) - 0)(X) = 0$.

- c) En déduire que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $d^k(B_n) = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}$.

Pour $k = 0$, on a $B_n = B_n$ donc le résultat est vrai.

À présent, démontrons le résultat par récurrence sur l'entier $k \geq 1$.

Commençons par prouver le résultat pour $k = 1$: montrons que $d(B_n) = nB_{n-1}$ si n est supérieur ou égal à 1. Pour $n = 1$, on sait que B_1 est de degré 1 et que $\Delta(B_1) = B_0 = 1$ donc le coefficient dominant de B_1 vaut 1 et ainsi $d(B_1) = 1$. Par conséquent, $d(B_1) - B_0 = 1 - 1 = 0$. Et, pour $n \geq 2$, on sait que $d(B_n) - nB_{n-1} \in \text{Ker}(\Delta)$ donc il existe une constante réelle c_n telle que $d(B_n) - nB_{n-1} = c_n$. Dans ce cas,

$$\int_0^1 d(B_n)(t) dt - \int_0^1 nB_{n-1}(t) dt = c_n.$$

Puisque $n \geq 2$, cela donne $B_n(1) - B_n(0) - 0 = c_n$ et donc $c_n = 0$.

Supposons maintenant qu'il existe un entier $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $d^k(B_n) = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}$.

Alors,

$$d^{k+1}(B_n) = \frac{n!}{(n-k)!} d(B_{n-k}) = \frac{n!}{(n-k)!} (n-k) B_{n-k-1} = \frac{n!}{(n-(k+1))!} B_{n-(k+1)}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $d^k(B_n) = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}$.

Dans la suite du problème, on notera pour tout entier naturel k , $b_k = B_k(0)$.

b_k est appelé le k -ième nombre de Bernoulli.

16. a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n on a, $\Delta B_n(X) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} B_{n-k}(X)$.

La formule de Taylor pour les polynômes donne :

$$\begin{aligned} \Delta B_n(X) &= B_n(X+1) - B_n(X) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} d^k(B_n)(X) 1^k - B_n(X) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} B_{n-k}(X) - B_n(X) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}(X) - B_n(X) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} B_{n-k}(X). \end{aligned}$$

- b) En déduire que pour tout entier naturel p , on a : $(p+1)X^p = \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} B_k(X)$.

On applique la formule de la question précédente avec $n = p+1$ ce qui donne :

$$(p+1)X^p = \Delta B_{p+1}(X) = \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} B_{p+1-k}(X) = \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j(X)$$

avec le changement d'indice $j = p+1-k$ et en utilisant la propriété de symétrie des coefficients binomiaux.

- c) Montrer alors la relation suivante pour tout entier p non nul : $\sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} b_k = 0$.

Cette relation permet de calculer les nombres de Bernoulli par récurrence à partir de $b_0 = B_0(0) = 1$. Calculer b_1 , b_2 et b_3 .

Il suffit d'évaluer la relation de la question précédente en 0 (on a bien $0^p = 0$ car p est non nul). On obtient ainsi, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{6}$ et $b_3 = 0$.

17. a) Soit n et p des entiers naturels non nuls. On rappelle que l'on note $S_n(p) = \sum_{k=0}^n k^p$.

Démontrer : $S_n(p) = \frac{1}{p+1} (B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0))$.

On a par définition des polynômes de Bernoulli, $(p+1)X^p = B_{p+1}(X+1) - B_{p+1}(X)$, donc :

$$\sum_{k=0}^n k^p = \sum_{k=0}^n \frac{1}{p+1} (B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)) = \frac{1}{p+1} (B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)).$$

b) En déduire pour tous entiers non nuls n et p , $S_n(p) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} b_k (n+1)^{p+1-k}$.

La formule de Taylor donne :

$$\begin{aligned} B_{p+1}(n+1) &= \sum_{k=0}^{p+1} \frac{1}{k!} d^k(B_{p+1})(0)(n+1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} \frac{(p+1)!}{k!(p+1-k)!} B_{p+1-k}(0)(n+1)^k \\ &= \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} b_j (n+1)^{p+1-j} \quad (\text{avec } j = p+1-k) \\ &= B_{p+1}(0) + \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} b_j (n+1)^{p+1-j} \end{aligned}$$

avec le changement d'indice $j = p+1-k$ et en utilisant la propriété de symétrie des coefficients binomiaux. D'où, $S_n(p) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} b_k (n+1)^{p+1-k}$.

c) Retrouver les valeurs de $S_n(1)$, $S_n(2)$ et $S_n(3)$.

On retrouve :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{1}{2} (b_0(n+1)^2 + 2b_1(n+1)) = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{1}{3} (b_0(n+1)^3 + 3b_1(n+1)^2 + 3b_2(n+1)) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

et

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{1}{4} (b_0(n+1)^4 + 4b_1(n+1)^3 + 6b_2(n+1)^2 + 4b_3(n+1)) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Partie IV : Nombres de Stirling et nombres de Bernoulli

18. À l'aide des résultats établis dans les deux parties précédentes, démontrer que pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 1, on a : $b_p = \sum_{i=1}^p (-1)^i \frac{i!}{i+1} \left\{ \begin{matrix} p \\ i \end{matrix} \right\}$.

En déduire une formule explicite des nombres de Bernoulli :

$$\forall p \geq 1, b_p = \sum_{i=1}^p \frac{1}{i+1} \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{i}{j} j^p.$$

Soit $n \geq 2$. D'une part, on a par la question 11. et la question 16. :

$$S_{n-1}(p) = \sum_{i=0}^p i! \left\{ \begin{matrix} p \\ i \end{matrix} \right\} \binom{n}{i+1} = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} b_k n^{p+1-k}.$$

Donc on a l'égalité entre polynômes :

$$\sum_{i=0}^p i! \left\{ \begin{matrix} p \\ i \end{matrix} \right\} \frac{X(X-1)\dots(X-i)}{(i+1)!} = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} b_k X^{p+1-k}$$

car leur différence admet une infinité de racines (tous les entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.) En particulier, leurs coefficients de degré 1 sont identiques, c'est-à-dire :

$$\sum_{i=0}^p i! \left\{ \begin{matrix} p \\ i \end{matrix} \right\} \frac{(-1)^i i!}{(i+1)!} = b_p$$

et donc

$$\sum_{i=1}^p i! \left\{ \begin{matrix} p \\ i \end{matrix} \right\} \frac{(-1)^i}{i+1} = b_p$$

car $\left\{ \begin{matrix} p \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$.

On obtient la dernière formule en remplaçant $\left\{ \begin{matrix} p \\ i \end{matrix} \right\}$ par sa valeur :

$$b_p = \sum_{i=1}^p i! \left(\frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} j^p \right) \frac{(-1)^i}{i+1} = \sum_{i=1}^p \frac{1}{i+1} \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{i}{j} j^p$$

car $0^p = 0$ puisque $p \geq 1$.

AVRIL 2024

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

**Corrigé de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

Dans toute cette épreuve, N désigne l'ensemble des entiers naturels, R l'ensemble des nombres réels, e le nombre de Néper et Ln le logarithme népérien.

Exercice n° 1

Soit f la fonction réelle définie par : $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La fonction s'écrit aussi : $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$. Son graphe admet la première bissectrice et la droite $x=-1$ comme asymptotes.

Sa dérivée est égale à : $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$. La fonction est croissante pour $x < -2$ et pour $x > 0$, sinon décroissante. On a : $f(-2) = -3$ et $f(0) = 1$.

2. Montrer que f admet un centre de symétrie (que l'on précisera).

Le point $A(-1, -1)$ est un centre de symétrie, en effet on pose $x = X - 1$ et $y = Y - 1$ pour obtenir :

$Y = \frac{X^2+1}{X}$ qui est une fonction impaire.

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x) dx$.

On obtient :

$$I = \left[\frac{x^2}{2} + \text{Ln}(x+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \text{Ln} 2$$

4. Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n) - u_n \text{ et } u_0 > 0.$$

La suite peut s'écrire : $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n} = g(u_n)$

On vérifie par récurrence que la suite est à termes strictement positifs.

Si la suite converge, sa limite vérifie : $l = \frac{1}{1+l}$ à savoir $l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Comme la fonction est décroissante, la suite n'est pas monotone. L'idée est d'étudier la suite des termes de rang pair et celle de rang impair.

Soit (v_n) la suite des termes de rang pair. On a : $v_n = \frac{1+v_{n-1}}{2+v_{n-1}}$.

Si $u_0 > l$, la suite (v_n) est minorée par l (on peut le vérifier par récurrence) et décroissante, elle converge vers l , qui est solution de l'équation $x = \frac{1+x}{2+x}$ et aussi un point fixe pour g . De même la suite des termes de rang impair est croissante et majorée par l . Les deux suites sont adjacentes et la suite (u_n) converge donc vers $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Le raisonnement est analogue si $u_0 < l$. Et si $u_0 = l$, la suite est stationnaire.

Exercice n° 2

Soit f la fonction réelle définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$f(x) = \frac{\text{Ln}x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1. Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.

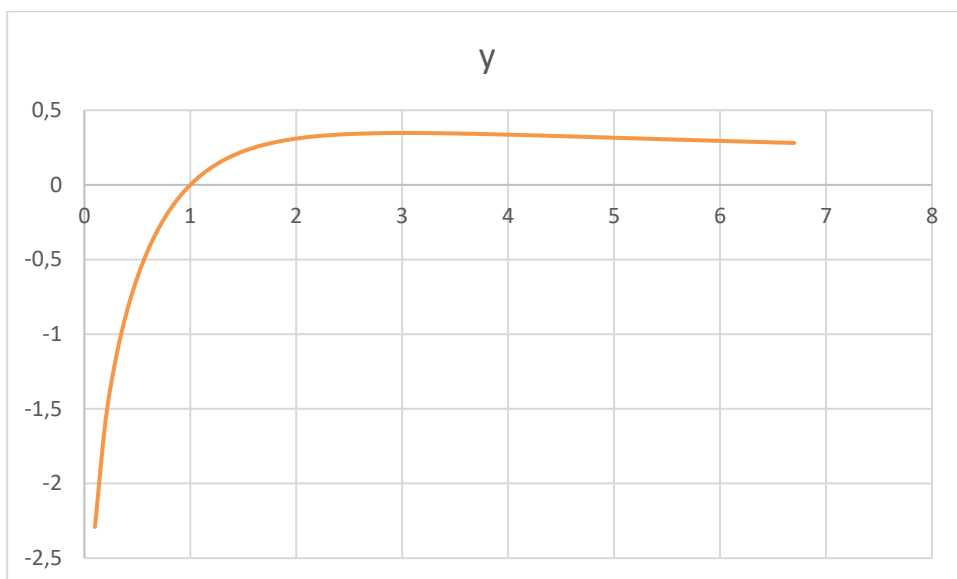
La dérivée de la fonction est égale à : $\frac{(1+x^2)-x^2\text{Ln}x}{x\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}$. Le signe de la dérivée dépend du numérateur : $z = (1+x^2) - x^2\text{Ln}x$.

La dérivée de z est égale à : $x(1-2\text{Ln}x)$ qui s'annule en $x = \sqrt{e}$.

La dérivée de z est positive pour $x < \sqrt{e}$ et négative sinon. Par conséquent la fonction z est d'abord croissante puis décroissante.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha \in]e, e^2 [$ qui annule la fonction z , car $z(0) = 1, z(e) = 1 > 0, z(e^2) = 1 - e^2 < 0$.

La fonction f est croissante pour $x < \alpha$ et décroissante sinon. Les deux axes sont des asymptotes et la fonction s'annule en 1.



2. Trouver une primitive de la fonction g définie sur les nombres réels strictement positifs par : $g(x) = x f(x)$.

Soit $I = \int x f(x) dx = [\sqrt{1+x^2} \ln x] - \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$. On pose $J = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$.

Pour calculer J , on effectue un changement de variable : $u = \sqrt{1+x^2}$. On obtient :

$$J = \int \frac{u^2}{u^2-1} du = \int \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\right) du = u + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)$$

On obtient comme primitive : $\sqrt{1+x^2} (\ln x - 1) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$

Exercice n° 3

On considère la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$, où a est un paramètre réel quelconque.

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice $M(a)$.

On calcule le déterminant $\det(M(a) - \mu I)$. Pour calculer ce déterminant, on retranche la troisième ligne à la première, puis après une mise en facteur de l'expression $(2-a-\mu)$, on ajoute la troisième colonne à la première, puis on développe le déterminant pour obtenir : $\det(M(a) - \mu I) = (2-a-\mu)(\mu-1+a)^2$. En conclusion, $1-a$ est une valeur propre double et $2-a$ est une valeur propre simple.

2. Etudier la diagonalisation de cette matrice.

La matrice est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous espace vectoriel propre associé à la valeur propre $1-a$ est de dimension 2.

Le système s'écrit :
$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ -6x - 2y + 2z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

On constate que la première équation est proportionnelle à la deuxième, donc il ne reste que deux équations : $3x+y-z=0$; $2x+y=0$. Le sous espace est de dimension 1 et engendré par exemple par le vecteur $e_1 = (1, -2, 1)$. La matrice n'est pas diagonalisable, mais seulement triangularisable.

3. Déterminer la valeur de a et une base dans laquelle la matrice $M(a)$ est semblable à la matrice

s suivante :
$$N(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

D'après ce qui précède, la matrice est semblable à une matrice triangulaire de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1-a & * & * \\ 0 & 1-a & * \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$$
. En comparant cette matrice avec celle recherchée, il faut $a=0$.

Pour obtenir la matrice semblable $N(a)$, on doit chercher un deuxième vecteur de base e_2 tel que : $M(e_2) = e_1 + e_2$, soit à résoudre le système : $3x+y-z=1$; $2x+y=1$, on peut donc choisir $e_2 = (1, -1, 1)$. Le troisième vecteur de la base sera un vecteur propre associé à l'autre valeur propre $2-a=2$. On peut prendre $e_3 = (1, -2, 0)$.

Exercice n° 4

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ y^{2n} \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$, où n est un entier naturel non nul.

1. Etudier la continuité de f

Pour tout le problème les difficultés se situent sur la droite $y=0$, et en dehors la fonction est indéfiniment différentiable.

Le problème de la continuité se situe donc sur la droite $y=0$, à savoir aux points $(x_0, 0)$.

Donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} f(x, y) = 0 = f(x_0, 0)$ (car la fonction sinus est majorée par 1 en valeur absolue) et f est continue.

2. Montrer que f admet des dérivées partielles premières en tout point.

Pour $y \neq 0$, $f'_x(x, y) = y^{2n-1} \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ et $f'_y(x, y) = 2ny^{2n-1} \sin\left(\frac{x}{y}\right) - xy^{2n-2} \cos\left(\frac{x}{y}\right)$

Pour $y=0$:

$$f'_x(x_0, 0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, 0) - f(x_0, 0)}{x - x_0} = 0 \text{ et}$$

$$f'_y(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} y^{2n-1} \sin \frac{x}{y} = 0.$$

Ces deux dérivées partielles existent et sont nulles.

3. Etudier la continuité des dérivées partielles premières de f .

Comme précédemment, le problème se pose uniquement aux points $(x_0, 0)$.

On a : $\lim_{(x_0,0)} f'_x(x, y) = 0 = f'_x(x_0, 0)$ et cette dérivée partielle est continue.

On a : $\lim_{(x_0,0)} f'_y(x, y) = \lim_{(x_0,0)} x y^{2n-2} \cos\left(\frac{x}{y}\right) = 0$, si $n > 1$.

Pour $n=1$: Si $x_0 \neq 0$, la limite n'existe pas et la dérivée partielle par rapport à y n'est pas continue et si $x_0 = 0$, la limite est nulle.

En conclusion, cette dérivée partielle première est continue sauf si $n=1$ et $x_0 \neq 0$.

4. Etudier la différentiabilité de f .

Si f est différentiable en $(x, 0)$, alors sa différentielle est nulle.

Donc f est différentiable en $(x_0, 0)$ si et seulement si $\lim_{(x_0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}} = 0$, ce qui est vérifié car

le numérateur est en y^{2n} en passant en coordonnées polaires, à savoir : $x - x_0 = r \cos \alpha$ et $y = r \sin \alpha$

Exercice n° 5

1. On considère deux suites numériques (u_n) et (v_n) définies par les relations de récurrence

$$\text{suivantes : } \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases} \text{ et } (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$$

Etudier la convergence de ces deux suites.

On peut faire une démonstration par combinaison (b) ou en utilisant la matrice du système (a). Il en est de même pour la deuxième question.

(a) Soit la matrice du système : $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(A + I)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $A^p = 2^{p-1}A$. En utilisant la formule du binôme, on obtient : $M^n = \frac{1}{3} \left(I + \frac{(1+2)^{n-1}}{2} A \right)$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} \frac{3^n + 1}{2} & \frac{3^n - 1}{2} \\ \frac{3^n - 1}{2} & \frac{3^n + 1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

En conclusion : $\lim u_n = \lim v_n = \frac{u_0 + v_0}{2}$

(b) On a : $u_n + v_n = u_{n-1} + v_{n-1} = \dots = u_0 + v_0$ et $u_n - v_n = \frac{1}{3^n} (u_0 - v_0)$

Bien sûr on obtient le même résultat.

2. On pose la même question pour les 3 suites numériques suivantes (on pourra chercher une suite géométrique combinaison linéaire de ces trois suites) :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(2v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(2w_n + u_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \end{cases} \text{ et } (u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$$

On cherche une suite (t_n) combinaison linéaire des 3 suites de la forme

$t_n = \alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n$ telle que cette suite soit géométrique. Deux possibilités :

$\alpha + \beta + \gamma = 0$ ou $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ (et alors $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0$).

Soit le système :

$$\begin{cases} u_n + v_n + w_n = u_0 + v_0 + w_0 \\ u_n + jv_n + j^2w_n = \left(\frac{j^2-1}{3}\right)^n (u_0 + jv_0 + j^2w_0) \\ u_n + j^2v_n + jw_n = \left(\frac{j-1}{3}\right)^n (u_0 + j^2v_0 + jw_0) \end{cases}$$

Comme les modules des deux coefficients à droite sont strictement inférieurs à 1, on en déduit : $\lim(u_n + j^2v_n + jw_n) = \lim(u_n + jv_n + j^2w_n) = 0$. Par conséquent

$$\lim u_n = \lim v_n = \lim w_n = \frac{u_0 + v_0 + w_0}{3}$$

Exercice n° 6

On note $M_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{Z} (ensemble des entiers relatifs).

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que M est inversible dans $M_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si son déterminant est égal à plus ou moins 1.

Si la matrice est inversible, on a : $MM^{-1} = I$, soit $\det(M) \times \det(M^{-1}) = 1$ et comme ces déterminants sont des entiers, on obtient : $\det(M) = \pm 1$. Réciproquement si le déterminant est égal à plus ou moins 1, la matrice est bien sûr inversible, il reste à vérifier que son inverse se trouve dans $M_n(\mathbb{Z})$. En effet en utilisant la matrice des cofacteurs : $M^{-1} = \frac{1}{\det M} (\text{co}M)'$

Et comme les cofacteurs sont des entiers, alors $M^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$.

2. Soit $q: \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par : $q(X) = x^2 + y^2 - z^2$, où $X = (x, y, z)$. On dit que $M \in M_n(\mathbb{Z})$ conserve q si on a $\forall X \in \mathbb{Z}^3 \quad q(X) = q(MX)$.

Montrer que l'ensemble des matrices qui conservent q est un groupe multiplicatif, que l'on notera $O(q)$.

On a : $q(X) = X'PX$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $q(MX) = (MX)'P(MX)$. Par conséquent :

$M \in O(q)$ ssi $X'PX = (MX)'P(MX) = X'(M'PM)X$, soit $M'PM = P$ (i)

Ainsi, il est clair que la multiplication est une opération interne et que la matrice unité appartient à l'ensemble.

Il reste à montrer que si $M \in O(q)$, alors la matrice est inversible et son inverse appartient aussi à $O(q)$. On a, d'après (i), $\det(M') \times \det(P) \times \det(M) = \det(P) \neq 0$, d'où $(\det(M))^2 = 1$ et la matrice est inversible.

D'après (i) : $P = P^{-1} = (M'PM)^{-1} = M^{-1}P(M^{-1})'$ et la matrice inverse appartient à l'ensemble.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A \in O(q)$

On vérifie (i) : $A'PA = P$

b) En déduire un mode de construction d'une famille de solutions de l'équation $q(X) = 0$ (on pourra exhiber une solution, à termes non nuls, de cette équation).

Comme $A \in O(q)$, le sous-groupe engendré par A est contenu dans $O(q)$ et par conséquent $A^p \in O(q)$. On peut vérifier que : $3^2 + 4^2 - 5^2 = 0$ donc $q(X_0) = 0$ pour $X_0 = (3,4,5)$. Par conséquent : $q(A^p X_0) = 0$. Ainsi on a un procédé de construction de solutions. Par exemple avec $A^2 X_0 = (20,21,29)$; $A^3 X_0 = (119,120,169)$.

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Par exemple, en ajoutant la deuxième colonne à la première, puis en ajoutant la deuxième ligne à la première, on obtient 3 valeurs propres distinctes $(1, 3 \mp 2\sqrt{2})$, la matrice est donc diagonalisable.