ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ENSEA-ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE ENSAE PIERRE NDIAYE-DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ISSEA-YAOUNDÉ

AVRIL 2024

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG/ ANALYSTE STATISTICIEN

ISE cycle long / AS

Première composition de mathématiques
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Exercice 1

1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\mathrm{d}x$.

   D'après le théorème fondamental du calcul intégral :

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(x^2)}{2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{\pi}} = 1.$$

2. Déterminer le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

   Dressons d'abord le tableau de signes de l'expression $\dfrac{x^3}{x-1}$ suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}$.

x		0		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
x^3	$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{x^3}{x-1}$	$+$	0	$-$	||	$+$

   On en déduit que la fonction est définie sur $]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$.

3. Montrer que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$ possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, dont on déterminera une équation cartésienne.

   Pour tout $x > 2$: $\dfrac{\frac{x^2-5x+7}{x-2}}{x} = \dfrac{x^2-5x+7}{x(x-2)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, puis :

$$\frac{x^2-5x+7}{x-2} - x = \frac{-3x+7}{x-2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -3.$$

   Ainsi, la droite d'équation : $y = x-3$ est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$.

4. Déterminer les limite à gauche et à droite en 2 de la fonction de la question précédente.
Par quotient : $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-5x+7}{x-2} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-5x+7}{x-2} = -\infty$.

5. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x)\ln(\cos(x))$ définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
La fonction est dérivable par composition et par produit, de dérivée
$$x \mapsto \cos(x)\ln(\cos(x)) - \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)}.$$

6. Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $a = -3+\mathrm{i}\sqrt{3}$.
On a : $\displaystyle -3+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

7. Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher : deux boules avec le numéro 1, une boule avec le numéro 5 et une boule avec le numéro 8. On pioche au hasard *sans remise* une première boule, puis une deuxième. On note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros obtenus. Calculer l'espérance de X.
Notons a le résultat du premier tirage, et b le résultat du second tirage, puis $X = (a,b)$ le couple formé par ces deux tirages, et enfin $G = a+b$ le gain. À l'aide d'un arbre, il vient :

X	$(1,1)$	$(1,5)$	$(1,8)$	$(5,1)$	$(5,8)$	$(8,1)$	$(8,5)$
$\mathbb{P}[X=(a,b)]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
G	2	6	9	6	13	9	13

Ainsi : $\displaystyle \mathbb{E}[G] = 2\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{3}+9\times\frac{1}{3}+13\times\frac{1}{6} = \frac{45}{6}$.

8. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n^2+2u_n$. Étudier la monotonie de la suite, puis déterminer sa limite.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n = u_n^2+u_n$.
Mais par récurrence immédiat : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n \geq 0$, et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
En vertu du théorème de la limite monotone, elle possède une limite $\ell\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.
Supposons $\ell\in\mathbb{R}$. Alors en passant à la limite : $\ell = \ell^2+2\ell$, donc : $\ell = 0$ ou $\ell = -1$.
C'est absurde, car pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n \geq u_0 > 0$. Donc la suite diverge vers $+\infty$.

9. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $\displaystyle v_n = \frac{3\ln(n)^4-n^3+\mathrm{e}^{-n}}{1+\cos(n)+2n^3}$. Étudier la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle v_n = -\frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{3\ln(n)^4}{n^3}-\frac{1}{\mathrm{e}^n n^3}}{1+\frac{\cos(n)}{2n^3}+\frac{1}{2n^3}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}$ par croissance comparée.

10. Résoudre l'équation : $\displaystyle\frac{1}{2}x^4-2x^2-3=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$, puis d'inconnue $x\in\mathbb{C}$.
On reconnaît une équation du second degré homogène en x^2, dont le discriminant est 10 :
$$\forall x\in\mathbb{C},\quad \frac{1}{2}x^4-2x^2-3 = \frac{1}{2}\left(x^2-(2+\sqrt{10})\right)\left(x^2-(2-\sqrt{10})\right).$$
Mais : $2-\sqrt{10} < 2-\sqrt{9} = -1 < 0$, donc les solutions réelles sont $\sqrt{2+\sqrt{10}}$ et $-\sqrt{2+\sqrt{10}}$, tandis que les solutions complexes sont $\sqrt{2+\sqrt{10}}$, $-\sqrt{2+\sqrt{10}}$, $\mathrm{i}\sqrt{\sqrt{10}-2}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{\sqrt{10}-2}$.

Exercice 2

1. **Question préliminaire.** Montrer que la composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.

   Soient E et F deux ensembles de $\mathbb{R}$, $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose f croissante et g décroissante.
   Méthode 1. Pour tous $a, b \in E$, si : $\quad a < b, \quad$ alors : $\quad f(a) < f(b) \quad$ car f est croissante, puis : $g\big(f(a)\big) > g\big(f(b)\big) \quad$ car g est décroissante. Conclusion : $g \circ f$ est décroissante.
   Méthode 2. Si f et g sont supposées dérivables, alors $f \circ g$ est aussi dérivable, et pour tout $x \in E$: $\quad (f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'\big(g(x)\big). \quad$ Par produit, on a : $\quad (f \circ g)'(x) \leq 0 \quad$ pour tout $x \in F$, donc $f \circ g$ est décroissante.

Dans cet exercice, on note I l'intervalle $[-1, +\infty[$, et on appelle f la fonction définie par :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = x\mathrm{e}^x.$$

2. Dresser le tableau de variation de f.

   Par produit, f est définie et dérivable sur I, et sa dérivée est $x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^x$.
   Par ailleurs : $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty. \quad$ On en déduit le tableau :

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	$-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Montrer que la fonction f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

   La fonction f est continue et strictement croissante sur I, donc d'après le théorème de la bijection (ou celui des valeurs intermédiaires strictement monotone), elle réalise une bijection de I sur son intervalle image : $\quad J = [-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.

On note g la réciproque de la fonction f, c'est-à-dire la fonction définie par la relation :

$$\forall x \in I, \quad \forall y \in J, \quad y = f(x) \iff x = g(y).$$

4. Donner sans démonstration le tableau de variations complet de la fonction g, et préciser $g(0)$.

   On a : $\quad f(0) = 0, \quad$ donc : $\quad g(0) = 0, \quad$ et :

x	$-\mathrm{e}^{-1}$		$+\infty$
g	-1	$\nearrow$	$+\infty$

5. Montrer que pour tout $x \in J$: $\quad g(x)\mathrm{e}^{g(x)} = x$.

   Soit $x \in J$. Posons : $\quad y = g(x)$.
   Alors : $\quad x = f(y) = f\big(g(x)\big), \quad$ c'est-à-dire : $\quad g(x)\mathrm{e}^{g(x)} = x$.

Pour tout réel $a > 0$, on note h_a la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x} + ax^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

6. Soit $a > 0$.

   (a) Montrer que la fonction h_a admet un minimum.

   La fonction h_a est définie et infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée première $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x} + 2ax$ et de dérivée seconde $x \mapsto \mathrm{e}^{-x} + 2a$. On en déduit le tableau :

x	$-\infty$		$+\infty$
$h_a''(x)$		$+$	
h_a'	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

   La fonction h_a' s'annule donc une unique fois, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, disons en α. La conclusion découle du tableau suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h_a'(x)$		$-$	0	$+$	
h_a	$??$	$\searrow$	$h_a(\alpha)$	$\nearrow$	$??$

On note m_a le point en lequel ce minimum est atteint.

   (b) Exprimer m_a en fonction de a et à l'aide de la fonction g.

   D'après la question précédente, m_a est l'unique solution de l'équation : $-\mathrm{e}^{-x} + 2ax = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Or :

$$-\mathrm{e}^{-m_a} + 2am_a = 0 \iff 2am_a = \mathrm{e}^{-m_a} \overset{a \neq 0}{\iff} \underbrace{m_a \mathrm{e}^{m_a}}_{f(m_a)} = \frac{1}{2a} \iff m_a = g\left(\frac{1}{2a}\right).$$

   (c) Montrer que : $h_a(m_a) = \dfrac{\mathrm{e}^{-m_a}}{2}(m_a + 2)$.

   On a : $2am_a = \mathrm{e}^{-m_a}$, donc : $am_a = \dfrac{\mathrm{e}^{-m_a}}{2}$, et :

$$h_a(m_a) = \mathrm{e}^{-m_a} + am_a^2 = \mathrm{e}^{-m_a} + \frac{\mathrm{e}^{-m_a}}{2} \times m_a = \frac{\mathrm{e}^{-m_a}}{2}(2 + m_a).$$

7. Montrer que la fonction $a \mapsto m_a$ définie sur $]0, +\infty[$ est décroissante, puis calculer ses limites aux bornes de son domaine de définition.

   Par composition, la fonction $a \mapsto g\left(\dfrac{1}{2a}\right)$ est décroissante, et par continuité de g sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\lim_{a \to 0^+} g\left(\frac{1}{2a}\right) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{a \to +\infty} g\left(\frac{1}{2a}\right) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = 0.$$

8. (a) Montrer que la fonction $a \mapsto h_a(m_a)$ est croissante.

Pour tout $a > 0$: $\quad h_a(m_a) = \dfrac{\mathrm{e}^{-m_a}}{2}(m_a + 2)$.

Méthode 1. La fonction $x \mapsto (x+2)\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, car de dérivée $x \mapsto -(x+1)\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$, donc par composition la fonction $a \mapsto h_a(m_a)$ est croissante.

Méthode 2. La fonction $a \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-m_a}}{2}(m_a+2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $a \mapsto -\dfrac{m_a' \mathrm{e}^{-m_a}}{2}(m_a + 1)$, donc elle est croissante.

(b) Déterminer la limite de la fonction $a \mapsto h_a(m_a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

On a : $\quad m_a \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0 \quad$ donc par composition $\quad h_a(m_a) = \dfrac{\mathrm{e}^{-m_a}}{2}(m_a+2) \xrightarrow[a \to +\infty]{} \dfrac{1}{2} \times 2 = 1$.

Exercice 3

On note φ la fonction $x \mapsto 3\sin(x)^5 - 5\sin(x)^3 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Le but de cette question est de trouver un intervalle d'étude *intelligent* de φ permettant de tracer entièrement la courbe $\mathscr{C}$.

(a) Expliquer pourquoi l'étude de φ sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$ permet de tracer entièrement $\mathscr{C}$.

La fonction φ est 2π-périodique, donc $\mathscr{C}$ est invariante par translation de vecteur $(2\pi, 0)$.

(b) Montrer que le point $I(0;1)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

Il s'agit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \varphi(-x) - 1 = -\big(\varphi(x) - 1\big)$.

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi(-x) - 1 = 3\sin(-x)^5 - 5\sin(-x)^3 + 1 - 1 &= -3\sin(x)^5 + 5\sin(x)^3 \\ &= -\big(3\sin(x)^5 - 5\sin(x)^3 + 1 - 1\big) = -\big(\varphi(x) - 1\big). \end{aligned}$$

(c) Montrer que la droite d'équation : $\quad x = \dfrac{\pi}{2} \quad$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

Il s'agit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \varphi\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$.

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^5 - 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^3 + 1 &= 3\cos(x)^5 - 5\cos(x)^3 + 1 \\ &= 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)^5 - 5\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)^3 + 1 = \varphi\left(\frac{\pi}{2} + x\right). \end{aligned}$$

(d) Expliquer finalement pourquoi l'étude de φ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ permet de tracer entièrement la courbe $\mathscr{C}$.

Supposons construite la courbe sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Alors on déduit la courbe sur $[0, \pi]$ par symétrie axiale d'axe : $\quad x = \dfrac{\pi}{2}, \quad$ puis sur $[-\pi, \pi]$ par symétrie centrale de centre $I(0;1)$, puis sur $\mathbb{R}$ tout entier par translation de vecteur $(2\pi, 0)$.

2. On note ψ la fonction $x \mapsto 3x^5 - 5x^3 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

(a) Calculer $\psi(0)$, $\psi(1)$ et $\psi(-1)$.

Immédiatement : $\quad \psi(0) = 1, \quad \psi(1) = -1 \quad$ et $\quad \psi(-1) = 3.$

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction ψ.

La fonction ψ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, de dérivée

$$x \mapsto 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x-1)(x+1).$$

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\psi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
ψ	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

(c) En déduire les variations de φ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\quad \varphi(x) = \psi\big(\sin(x)\big).$

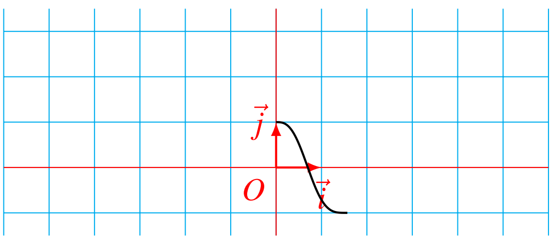
Méthode 1. Or la fonction sin est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et à valeurs dans $[0,1]$. Comme la fonction ψ est décroissante sur $[0,1]$, la fonction φ est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par composition.

Méthode 2. Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\quad \varphi'(x) = \cos(x)\psi'\big(\sin(x)\big) \geq 0 \quad$ car $\sin(x) \in [0,1]$.

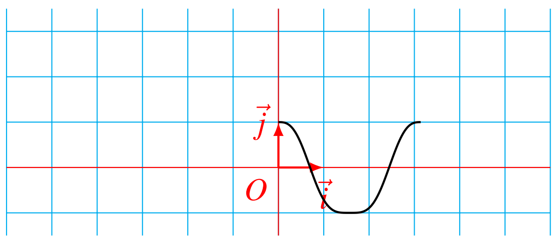
Enfin : $\quad \varphi(0) = \psi(0) = 1 \quad$ et $\quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \psi(1) = -1.$

3. Construire la courbe $\mathscr{C}$.

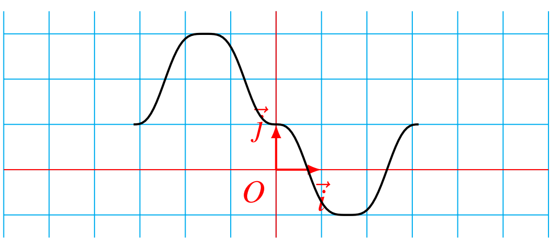
On construit le graphe de ϕ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$...



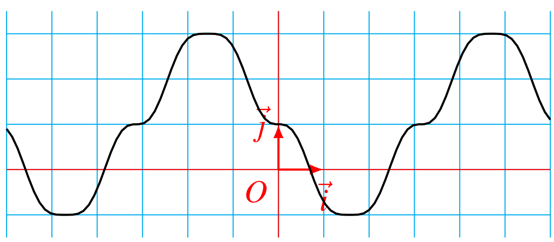
... qu'on complète sur $[0,\pi]$ par symétrie par rapport à l'axe : $\quad x = \frac{\pi}{2}$...



... qu'on complète sur $[-\pi,\pi]$ par symétrie centrale de centre O...



... qu'on complète sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.



Exercice 4

On note B la fonction définie pour tous $a,b \in [0,+\infty[$ par : $\quad B(a,b) = \int_0^1 t^a(1-t)^b \mathrm{d}t$.

1. Justifier que la fonction B est bien définie.

   Pour tous $a,b \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto t^a(1-t)^b$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale définissant $B(a,b)$ est bien définie.

2. Le but de cette question est de calculer $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

   (a) En effectuant le changement de variable $t = \cos(\theta)^2$, montrer que :

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \mathrm{d}\theta.$$

   Si on pose : $\quad t = \cos(\theta)^2, \quad$ alors :

$$\begin{aligned} B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\cos(\theta)^2(1-\cos(\theta)^2)} \times (-2\sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta) \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(\theta)| \times |\sin(\theta)| \sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^2\sin(\theta)^2\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

   (b) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad \cos(\theta)^2\sin(\theta)^2 = \dfrac{1-\cos(4\theta)}{8}$.

   Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta), \quad$ donc : $\quad \cos(\theta)^2\sin(\theta)^2 = \dfrac{\sin(2\theta)^2}{4}$, puis : $\quad \sin(\theta)^2 = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}, \quad$ donc : $\quad \dfrac{\sin(2\theta)^2}{4} = \dfrac{1-\cos(4\theta)}{8}$.

   (c) En déduire la valeur de $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

   Enfin : $\quad B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos(4\theta)}{8}\mathrm{d}\theta = \dfrac{1}{4}\left[\theta - \dfrac{\sin(4\theta)}{4}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{8}$.

3. Soient $a,b \in [0,+\infty[$.

   (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\quad B(a+1,b) = \dfrac{a+1}{b+1}B(a,b+1)$.

   En intégrant par parties, les fonctions $t \mapsto t^{a+1}$ et $t \mapsto (1-t)^b$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned} B(a+1,b) &= \int_0^1 t^{a+1}(1-t)^b \mathrm{d}t \\ &= \left[t^{a+1} \times \left(-\frac{(1-t)^{b+1}}{b+1}\right)\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 (a+1)t^a \times \left(-\frac{(1-t)^{b+1}}{b+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{a+1}{b+1}B(a,b+1). \end{aligned}$$

(b) Vérifier que : $B(a+1,b)+B(a,b+1)=B(a,b)$.

Par linéarité de l'intégrale :

$$B(a+1,b)+B(a,b+1)=\int_0^1 t^{a+1}(1-t)^b \mathrm{d}t+\int_0^1 t^a(1-t)^{b+1}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1 \underbrace{t^{a+1}(1-t)^b+t^a(1-t)^{b+1}}_{\substack{=t^a(1-t)^b(t+1-t)\\ =t^a(1-t)^b}}\mathrm{d}t=B(a,b).$$

(c) En déduire une expression de $B(a+1,b)$ en fonction de $B(a,b)$.

Ainsi : $B(a+1,b)\overset{\text{Q 3.a)}}{=}\dfrac{a+1}{b+1}B(a,b+1)\overset{\text{Q 3.b)}}{=}\dfrac{a+1}{b+1}\big(B(a,b)-B(a+1,b)\big)$, donc :

$$\left(1+\frac{a+1}{b+1}\right)B(a+1,b)=\frac{a+1}{b+1}B(a,b),$$

d'où : $B(a+1,b)=\dfrac{a+1}{a+b+2}B(a,b)$.

(d) Au moyen d'un changement de variable, montrer que : $B(a,b)=B(b,a)$.

Effectuons le changement de variable : $u=1-t$, il vient :

$$B(a,b)=\int_0^1 t^a(1-t)^b\mathrm{d}t=\int_1^0(1-u)^a u^b(-\mathrm{d}u)=\int_0^1 u^b(1-u)^a\mathrm{d}u=B(b,a).$$

(e) En déduire la valeur de $B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Il vient : $B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)\overset{\text{Q 3.c)}}{=}\dfrac{\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$, puis :

$$B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\overset{\text{Q 3.c)}}{=}\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+2}B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{8}B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),$$

et : $B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\overset{\text{Q 3.d)}}{=}B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\overset{\text{Q 3.c)}}{=}\dfrac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Finalement :

$$B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{32}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{3\pi}{256}.$$

Exercice 5

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0\in]0,1[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=u_n-u_n^3$.

1. (a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\in]0,1[$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathscr{H}_n$ la propriété : « $u_n\in]0,1[$ ».
Initialisation. Par hypothèse, $\mathscr{H}_0$ est vraie.
Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose $u_n\in]0,1[$. Alors $1-u_n^2\in]0,1[$, donc par produit : $u_{n+1}=u_n(1-u_n^2)\in]0,1[$. C'est exactement $\mathscr{H}_{n+1}$.

(b) Montrer que la suite converge vers 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -u_n^3 < 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Décroissante et minorée, elle converge en vertu du théorème de la limite monotone. Sa limite $\ell \in [0,1]$ vérifie l'équation : $\ell = \ell - \ell^3$, donc $\ell = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.

2. Exprimer v_n en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_n^2(1-u_n^2)^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1-(1-u_n^2)^2}{u_n^2(1-u_n^2)^2} = \frac{2u_n^2 - u_n^4}{u_n^2(1-u_n^2)^2} = \frac{2-u_n^2}{(1-u_n^2)^2}.$$

Mais : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc par composition : $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{2-0}{(1-0^2)^2} = 2$.

3. On note f la fonction $x \mapsto \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$ définie sur l'intervalle $]0,1[$.

(a) Montrer que f est croissante.

Par quotient, la fonction f est définie et dérivable sur $]0,1[$, et pour tout $x \in]0,1[$:

$$f'(x) = \frac{(-1)\times(1-x)^2 - (2-x)\times\big(-2(1-x)\big)}{(1-x)^4} = \frac{3-x}{(1-x)^3} > 0.$$

Donc f est croissante.

(b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Méthode 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_{n+1} < u_n < 1$, donc : $0 < u_{n+1}^2 < u_n^2 < 1$ car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $]0,1[$, donc par croissance de f : $f(u_{n+1}^2) < f(u_n^2)$, c'est-à-dire : $v_{n+1} < v_n$.

Méthode 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{1-u_n^2} \times \left(1 + \dfrac{1}{1-u_n^2}\right) \geq 2$ car $u_n \in]0,1[$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n \geq 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in]0,1[$, donc : $u_n^2 \in]0,1[$, donc par croissance de f :

$$v_n = f(u_n^2) \geq f(0) = 2.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $x_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = \dfrac{v_0 + \cdots + v_n}{n+1}$.

4. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_0 \geq x_n \geq v_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$ on a : $v_0 \geq v_k \geq v_n$, car la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En sommant, il vient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_0 \geq \sum_{k=0}^{n} v_k \geq \sum_{k=0}^{n} v_n$, c'est-à-dire : $(n+1)v_0 \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \geq (n+1)v_n$. Par suite : $v_0 \geq x_n \geq v_n$.

(b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge, puis que sa limite L vérifie : $L \geq 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+2}\big(v_{n+1} + (n+1)x_n\big) \leq \frac{1}{n+2}\big(v_n + (n+1)x_n\big) \leq \frac{1}{n+2}\big(x_n + (n+1)x_n\big) = x_n.$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est minorée par 2, elle converge et : $L \geq 2$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 2x_{2n+1} - x_n \leq v_{n+1}$. $\quad$ En déduire que $L = 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2x_{2n+1} - x_n = \frac{2}{2n+2} \sum_{k=0}^{2n+1} v_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} v_k \overset{\text{simplification}}{=} \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{2n+1} v_k$$
$$\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{2n+1} v_{n+1} = \frac{1}{n+1} \times (2n+1-(n+1)+1) v_{n+1} = v_{n+1}.$$

En passant à la limite : $\quad 2L - L \leq 2$, $\quad$ c'est-à-dire : $\quad L \leq 2$.
Or : $\quad L \geq 2$, $\quad$ donc : $\quad L = 2$.

(d) Exprimer simplement x_{n-1} en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad x_{n-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \overset{\text{télescopage}}{=} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right)$.

(e) En déduire la limite de $(nu_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad nu_n^2 = \dfrac{1}{x_{n-1} + \frac{1}{nu_0^2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

Exercice 6

1. **Question de cours.** Dans cette question, on fixe deux nombres réels a et b.

(a) Montrer que : $\quad \big(\cos(a) + i\sin(a)\big) \times \big(\cos(b) + i\sin(b)\big) = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$.

Il suffit de développer et de reconnaître les formules d'addition :

$$\big(\cos(a) + i\sin(a)\big) \times \big(\cos(b) + i\sin(b)\big)$$
$$= \underbrace{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}_{=\cos(a+b)} + i \underbrace{\big(\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)\big)}_{=\sin(a+b)}$$
$$= \cos(a+b) + i\sin(a+b).$$

(b) Montrer par récurrence que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(\cos(a) + i\sin(a)\big)^n = \cos(na) + i\sin(na)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{H}_n$ la propriété : « $\big(\cos(a) + i\sin(a)\big)^n = \cos(na) + i\sin(na)$ ».

Initialisation. On a : $\quad \cos(0a) + i\sin(0a) = 1 = \big(\cos(a) + i\sin(a)\big)^0$, $\quad$ donc $\mathscr{H}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose : $\quad \big(\cos(a) + i\sin(a)\big)^n = \cos(na) + i\sin(na)$. $\quad$ Aussitôt :

$$\big(\cos(a) + i\sin(a)\big)^{n+1} = \big(\cos(a) + i\sin(a)\big)^n \times \big(\cos(a) + i\sin(a)\big)$$
$$\overset{\text{HR}}{=} \big(\cos(na) + i\sin(na)\big) \times \big(\cos(a) + i\sin(a)\big)$$
$$\overset{\text{Q 1.a)}}{=} \cos\big((n+1)a\big) + i\sin\big((n+1)a\big).$$

C'est exactement $\mathscr{H}_{n+1}$.

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation : $\quad z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 \quad$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

2. (a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de sorte que : $(a+ib)^2 = 80+18\mathrm{i}$.
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a : $(a+\mathrm{i}b)^2 = a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab$.
On cherche donc $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesquels : $a^2 - b^2 = 80$ et $2ab = 18$.
Les nombres : $a = 9$ et $b = 1$ conviennent, et on peut vérifier que :

$$(9+\mathrm{i})^2 = 81 + 18\mathrm{i} - 1 = 80 + 18\mathrm{i}.$$

(b) En déduire les racines de l'équation : $x^2 + (7-\mathrm{i})x - 8 - 8\mathrm{i} = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$.
Le discriminant de l'équation est :

$$(7-\mathrm{i})^2 - 4 \times 1 \times (-8-8\mathrm{i}) = 49 - 14\mathrm{i} - 1 + 32 + 32\mathrm{i} = 80 + 18\mathrm{i} = (9+\mathrm{i})^2.$$

Les solutions sont donc : $\dfrac{-(7-\mathrm{i})+(9+\mathrm{i})}{2} = 1+\mathrm{i}$ et $\dfrac{-(7-\mathrm{i})-(9+\mathrm{i})}{2} = -8.$

3. (a) Vérifier que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.
En développant : $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$.

(b) En déduire les *racines cubiques* complexes de -8, c'est-à-dire les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels : $z^3 = -8$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $z^3 + 8 \overset{-8=(-2)^3}{=} (z+2)(z^2-2z+4) \overset{\Delta=-12}{=} (z+2)\big(z-(1+\mathrm{i}\sqrt{3})\big)\big(z-(1-\mathrm{i}\sqrt{3})\big) = 0$. Les racines cubique de -8 sont donc -2, $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

4. (a) Écrire $1+\mathrm{i}$ sous forme trigonométrique.
On a : $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

(b) En déduire les solutions de l'équation : $z^3 = 1+\mathrm{i}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Vous écrirez les solutions sous forme trigonométrique.
Soit $z = \rho\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big)$ une solution de l'équation écrite sous forme trigonométrique.
Alors : $z^3 = 1+\mathrm{i} \iff \rho^3\big(\cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta)\big) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$, donc :

$$\rho^3 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad 3\theta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

et donc : $\rho = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$ et $\theta \equiv \dfrac{\pi}{12}\left[\dfrac{2\pi}{3}\right]$.
Les solutions sont donc :

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right), \quad \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$
$$\text{et} \quad \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right).$$

Exercice 7

Une entreprise fabrique des casques audio. Dans sa production, 5% des casques ne sont pas conformes (ils ont un défaut). Afin de détecter les casques défaillants, l'entreprise met en place un contrôle qualité : ce contrôle permet de rejeter 96% des casques défaillants, mais rejette malheureusement également 7% des casques en état de marche.

Dans la suite, on note R l'évènement « le casque est rejeté », et D l'évènement « le casque est défaillant ».

1. On choisit un casque au hasard dans cette production.
   (a) Calculer $\mathbb{P}\left(\overline{R}\cap D\right)$, c'est-à-dire la probabilité que le casque ne soit pas rejeté au contrôle qualité et qu'il soit défaillant.
   On a : $\mathbb{P}\left(\overline{R}\cap D\right) = \mathbb{P}\left(\overline{R}|D\right)\times\mathbb{P}(D) = 0,04\times 0,05 = 0,002.$
   (b) Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?
   Il y a une erreur de contrôle lorsque le casque n'est pas défaillant et qu'il est rejeté, ou bien lorsque le casque est défaillant et qu'il n'est pas rejeté. On cherche donc :
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}\left((\overline{R}\cap D)\sqcup(R\cap\overline{D})\right) = \mathbb{P}\left(\overline{R}\cap D\right)+\mathbb{P}\left(R\cap\overline{D}\right) &= \mathbb{P}\left(\overline{R}|D\right)\times\mathbb{P}(D)+\mathbb{P}\left(R|\overline{D}\right)\times\mathbb{P}\left(\overline{D}\right)\\ &= 0,04\times 0,05+0,07\times 0,95 = 0,0685.\end{aligned}$$
   (c) Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas rejeté par ce contrôle ?
   Un casque n'est pas rejeté s'il n'est pas défaillant et qu'il n'est pas rejeté, ou bien s'il est défaillant et qu'il est rejeté. On cherche donc :
   $$\mathbb{P}\left((\overline{R}\cap D)\sqcup(\overline{R}\cap\overline{D})\right) = \mathbb{P}\left(\overline{R}\cap D\right)+\mathbb{P}\left(\overline{R}\cap\overline{D}\right) = 0,95\times 0,93+0,05\times 0,04 = 0,8855.$$

À la suite du test, les casques qui sont détectés défaillants sont détruits, et ne sortent donc pas de l'usine. L'entreprise fabrique 10000 casques chaque jour.

2. Combien de casques sortent effectivement chaque jour de l'entreprise en moyenne ?
   Le nombre de casques suit une loi binomiale de paramètres 10000 et $0,8855$, dont l'espérance vaut : $10000\times 0,8855 = 8855.$

La production d'un casque coûte 20 euros. Chaque casque sortant de l'usine est vendu 80 euros, et on suppose que tous les casques sont vendus. Cependant, l'entreprise, qui tient à sa réputation, promet de payer 160 euros aux malheureux clients qui auraient acheté un casque défectueux.

3. Combien rapporte en moyenne un casque à l'entreprise ?
   Les casques détruits coûtent 20 euros à l'entreprise (perte sèche), les casques conformes qui sortent de l'usine rapportent 60 euros, tandis que les casques non conformes qui sortent de l'usine coûtent 100 euros. Si on note G le gain d'un casque :
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}[G] &= 60\times\mathbb{P}\left(\overline{D}\cap\overline{R}\right)-20\times\mathbb{P}\left((\overline{D}\cap R)\sqcup(D\cap R)\right)-100\times\mathbb{P}\left(D\cap\overline{R}\right)\\ &= 60\times 0,95\times 0,93-20\times(0,95\times 0,07+0,05\times 0,96)-100\times 0,05\times 0,04\\ &= 50,52.\end{aligned}$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2024

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE cycle long / AS

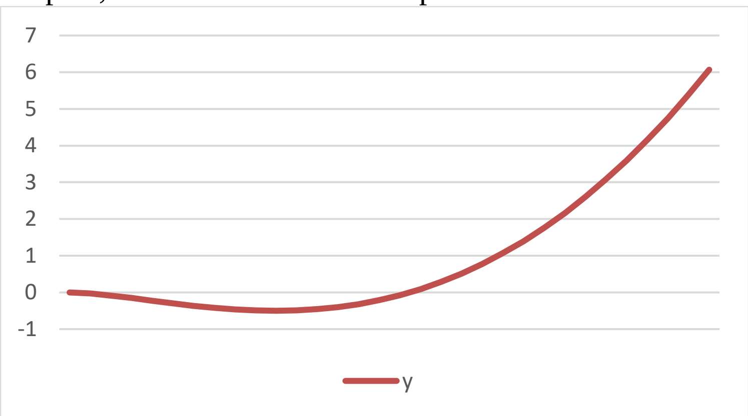
Corrigé de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

Soit l'application f définie sur R^+ par : $f\ (x) = x^2 Ln\ (x) - \frac{x^2}{2}$ si $x>0$ et $f(0)=0$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en zéro.
La fonction est bien continue en zéro à droite : $\underset{0}{Lim}\ f(x) = \underset{0}{Lim}\ x^2\ (Ln\ x - \frac{1}{2}) = 0 = f(0)$
Pour la dérivée à droite en zéro, on a : $\underset{0}{Lim} \frac{f(x))}{x} = 0$.

2. Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.
La dérivée de f est égale à : $2\ x\ Ln\ x$ qui s'annule pour 0 (avec la condition *f(0)=0)* et en 1. La fonction est décroissante entre 0 et 1, puis croissante. Elle vaut -1/2 en x=1. Son graphe admet une branche parabolique dans la direction Oy.
De plus, la fonction est convexe pour x>1/e. La fonction s'annule en racine de e.



3. Calculer $I = \int_1^e f(x)\ dx$.
On a : $I = \int_1^e x^2 Ln\ (x)\ dx - \int_1^e \frac{x^2}{2}\ dx = J - \frac{(e^3-1)}{6}$
Puis on intègre J par parties, pour obtenir : $J = \left[\frac{x^3}{3}\ Ln\ x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e$.
Par conséquent : $I = \frac{1}{18}(5 + e^3)$

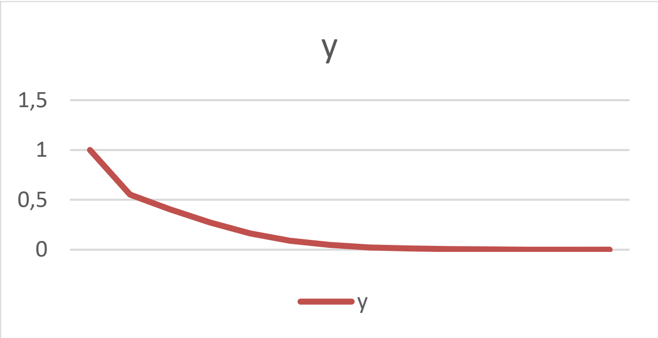
4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions sur R^+ dont l'une est comprise entre $\sqrt{e}$ et e.

x=0 est une solution triviale. Pour *x*>0, on étudie les variations de *y=x Ln x-x/2 -1* : cette fonction est décroissante et négative pour $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$ et strictement croissante pour $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$. Elle vaut de plus -1 en $x = \sqrt{e}$ et $\frac{e}{2} - 1 \approx 0.65$ en $x = e$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle admet donc une unique racine comprise entre $\sqrt{e}$ et e.

Exercice n° 2

Soit la fonction g définie sur R^+ par : $g\,(x) = e^{-2x}\,(2x^2 + 1)$.

1. Etudier les variations de g et tracer son graphe.
La dérivée est égale à : $e^{-2x}\,(-4x^2 + 4x - 2) < 0$, la fonction est donc décroissante de 1 à 0.



2. Etudier la convexité de g.
La dérivée seconde est égale à : $8e^{-2x}\,(x^2 - 2x + 1) > 0$ et la fonction est strictement convexe.

3. Calculer $I = \int_0^1 g(x)\,dx$.
Une primitive de g sera de la forme : $G\,(x) = e^{-2x}\,(ax^2 + bx + c)$. On calcule sa dérivée et on identifie les polynômes pour obtenir : $G\,(x) = -e^{-2x}\,(x^2 + x + 1)$, d'où la valeur de l'intégrale : $I = 1 - \frac{3}{e^2}$

Exercice n° 3

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé.
Soit A le point de P d'affixe $2i$.
Soit $f: P - A \rightarrow P$ définie par : $f(z) = \frac{z+1}{z-2i}$.

1. Déterminer l'ensemble E des points de P dont l'image par f est un nombre réel non nul.
On doit résoudre : $\frac{z+1}{z-2i} = a$, où a est un nombre réel non nul, soit le système :
$x + 1 = ax; y = a(y-2)$ et en éliminant a entre les deux équations, on obtient : $y = 2x + 2$ (à l'exception du point A).

2. Déterminer l'ensemble F des points de P dont l'image par f a pour affixe un nombre imaginaire pur non nul.

On procède de façon analogue pour obtenir le système : $x+1=-a(y-2); y=ax$ et en éliminant a entre les deux équations, on obtient : $(x+\frac{1}{2})^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$.

Il s'agit donc d'un cercle de centre A(-1/2,1) et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Exercice n° 4

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

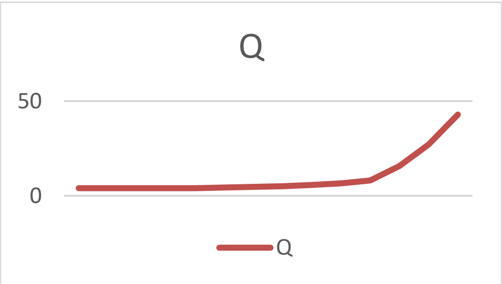
1. Une entreprise de location de voitures particulières propose à sa clientèle deux tarifs :
Tarif A : prise en charge 60 dollars par jour et prix unitaire au km : 0,40 dollar.
Tarif B : prise en charge 80 dollars par jour et prix unitaire au km : 0,30 dollar.
Un automobiliste va effectuer un voyage d'affaires de 3 jours.
Déterminer le tarif le plus avantageux pour l'automobiliste en fonction du nombre de kilomètres parcourus.

Pour le tarif A : $y=3*60+0{,}4x$ et pour le tarif B : $y=3*80+0{,}3x$. Ces deux droites se coupent pour x=600. Par conséquent, si l'automobiliste parcourt plus de 600 kms, le tarif B est préférable, sinon c'est le tarif A.

2. La fonction d'offre Q exprime la quantité produite q d'un bien en fonction de son prix p :

$$q=Q(p) \text{ où } Q(p)=\begin{cases} 4 & si \quad 0<p<2 \\ 8(6-p)^{-1/2} & si \quad 2\leq p<5 \\ (p-3)^3 & si \quad p\geq 5 \end{cases}$$

Etudier la continuité et la convexité de Q sur chaque intervalle (de la définition) et tracer son graphe.
La fonction est continue, car les fonctions ont les mêmes valeurs en 2 et 5.
La fonction n'est pas dérivable en 2, car la dérivée à gauche est nulle et celle à droite vaut ½.
De même, la fonction n'est pas dérivable en 5, car la dérivée à gauche est égale à 4 et celle à droite vaut 12.
La fonction est convexe sur chaque sous intervalle car les dérivées secondes sont positives ou nulles. Et même la fonction est convexe sur son ensemble de définition.



Exercice n° 5

Une urne contient 8 boules numérotées : 3 boules portent le chiffre 1, 3 boules le chiffre 2, 1 boule le chiffre 3 et 1 boule le chiffre 4. On tire au hasard simultanément deux boules et on note x et y les deux chiffres obtenus.

On considère la variable aléatoire X définie par : $X=|x-y|$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

Le nombre total de cas est : $C_8^2 = \frac{8\times 7}{2} = 28$. La loi de probabilité est :

X	0	1	2	3
P (X)	6/28	13/28	6/28	3/28

L'espérance est :

$$E(X) = \sum_{i=0}^{3} p_i x_i = \frac{13+12+9}{28} = \frac{17}{14}.$$

2. Calculer la variance de X.

On a : $Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$ et

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{3} p_i x_i^2 = \frac{13+24+27}{28} = \frac{16}{7},$$

d'où $Var(X) = \frac{16}{7} - \left(\frac{17}{14}\right)^2 = \frac{159}{196}$.

3. Soit la variable aléatoire $Y = -2X+1$. Calculer son espérance et sa variance.

On obtient : $E(Y) = -2E(X) + 1 = -10/7$ et $Var(Y) = 4Var(X) = 159/49$

Exercice n° 6

Pour n entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}$.

1. Etudier les variations de f_n selon les valeurs de n.

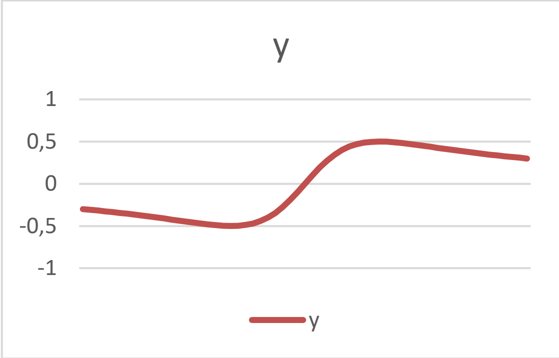
Si n est pair, la fonction est également paire et si n est impair, la fonction est impaire. On fera donc l'étude que sur les réels positifs.

La dérivée est égale à : $f'_n(x) = \frac{x^{n-1}(n+(n-2)x^2)}{(1+x^2)^2}$

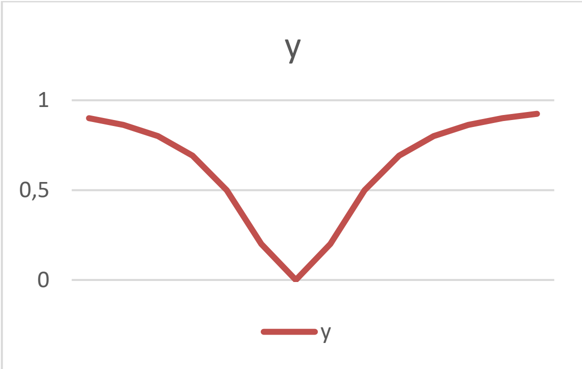
- Si $n=1$, la dérivée est égale à : $f'_1(x) = \frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ qui s'annule pour $x=1$. La fonction est croissante entre 0 et 1 puis décroissante.
- Si $n=2$, la dérivée est égale à : $f'_2(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ qui s'annule pour $x=0$. La fonction est croissante sur les réels positifs et son graphe admet une asymptote horizontale y=1.
- Si $n>2$, la fonction est strictement croissante sur les réels positifs.

2. Tracer le graphe de f_1 et celui de f_2 .

- Graphe de f_1



- Graphe de f_2



3. Soit $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

- Calculer I_1 et I_2

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[Ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{Ln\,2}{2}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 (1-\frac{1}{1+x^2})\,dx = \left[x - Arctgx\right]_0^1 = 1-\frac{\pi}{4}$$

- Calculer I_n pour tout n (on distinguera selon que n est pair ou impair).

Pour n pair $(n = 2p)$:

$$\frac{x^{2p}}{1+x^2} = x^{2p-2} - x^{2p-4} + \cdots + (-1)^{p+1} + (-1)^p \frac{1}{1+x^2}$$

et

$$I_{2p} = \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p-3} + \cdots + (-1)^{p+1} + (-1)^p \frac{\pi}{4}.$$

Pour n impair $(n = 2p+1)$:

$$\frac{x^{2p+1}}{1+x^2} = x^{2p-1} - x^{2p-3} + \cdots + (-1)^{p+1}x + (-1)^p \frac{x}{1+x^2}$$

et

$$I_{2p+1} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2p-2} + \cdots + (-1)^{p+1}\frac{1}{2} + (-1)^p \frac{Ln\,2}{2}.$$