ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

ISE Cycle long / AS

CORRIGÉ de la 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Avertissement !

- **Le sujet comporte cinq pages numérotées de 1 à 5.**
- **L'exercice 1 est composé de 10 questions indépendantes entre elles, toutes notées sur 1 point. Une note strictement inférieure à 6 est éliminatoire. Toutefois, cet exercice ne comptera que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve.**

Notations

— On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des *entiers naturels*, et on pose : $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

— On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des *nombres réels*, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, et on pose : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

— On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des *nombres complexes* — il contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, ainsi qu'un élément i qui vérifie : $\mathrm{i}^2 = -1$.

Exercice 1

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

   D'après le théorème fondamental du calcul intégral :

$$\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1-\mathrm{e}^{-4}}{2}.$$

2. Déterminer le domaine de définition de la fonction numérique $x \mapsto \sqrt{\ln(x^2+x-1)}$.
La fonction est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que : $x^2+x-1>0$ et : $\ln(x^2+x-1) \geq 0$, c'est-à-dire tel que : $x^2+x-1>0$ et : $x^2+x-1 \geq 1$.
Or le discriminant de x^2+x-1 est : $1^2-4\times1\times(-1)=5$, donc les racines sont $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, donc : $x^2+x-1>0 \iff x \in]-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}[\cup]\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$.
De même : $x^2+x-1 \geq 1 \iff x^2+x-2 \geq 0 \iff x \in]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.
Mais : $2 < \sqrt{5} < 3$, donc : $-2 < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$, donc la fonction est définie sur $]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.

3. Montrer que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{3x^2+7x-1}{x+3}$ possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, dont on déterminera une équation cartésienne.
Pour tout $x>0$: $\dfrac{\frac{3x^2+7x-2}{x+3}}{x} = \dfrac{3x^2+7x-2}{x^2+3x} = \dfrac{3x^2}{x^2} \times \dfrac{1+\frac{7}{3x}-\frac{2}{3x^2}}{1+\frac{3}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 3\times1=3$, puis :

$$\frac{3x^2+7x-2}{x+3} - 3x = \frac{3x^2+7x-2}{x+3} - \frac{3x(x+3)}{x+3} = \frac{-2x-2}{x+3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -2.$$

Donc la fonction possède la droite d'équation cartésienne : $y = 3x-2$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$.

4. Étudier la limite de $\dfrac{x^2-3x^3}{x^4e^x-1}$ lorsque x tend vers $-\infty$.
On a : $\dfrac{x^2-3x^3}{x^4e^x-1} = 3x^3 \times \dfrac{1-\frac{1}{3x}}{1-x^4e^x}$.
Par croissance comparée : $x^4e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, donc par produit : $\dfrac{x^2-3x^3}{x^4e^x-1} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$.

5. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln\big(\cos(3x)\big)$ définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{6}\right[$.
La dérivée de la fonction est $x \mapsto \dfrac{-3\sin(3x)}{\cos(3x)} = -3\tan(3x)$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{6}\right[$.

6. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0>0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n+u_n^2} - \dfrac{1}{2}$. Montrer que la suite $(u_n+u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique. Préciser sa raison.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}+u_{n+1}^2 &= \sqrt{1+u_n+u_n^2} - \frac{1}{2} + \left(\sqrt{1+u_n+u_n^2} - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \sqrt{1+u_n+u_n^2} - \frac{1}{2} + 1 + u_n + u_n^2 - \sqrt{1+u_n+u_n^2} + \frac{1}{4} \\ &= u_n + u_n^2 + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

La suite est arithmétique de raison $\dfrac{3}{4}$.

7. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On lance n fois de suite une pièce équilibrée, et l'on note P lorsque la pièce tombe sur « pile », et F lorsque la pièce tombe sur « face ». Le résultat est alors donné par une liste de n lettres P ou F. Par exemple, pour $n = 4$, on note $PFPP$ pour indiquer qu'on a tiré « pile » au premier lancer, puis « face » au deuxième, puis « pile » au troisième et au quatrième.
   (a) Combien y a-t-il de listes possibles ?
   Il y a 2^n possibilités.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux « pile » lors des n lancers.
   Il y a $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ possibilités.
   Comme elles sont toutes équiprobables, la probabilité est : $\dfrac{n(n-1)}{2} \times \dfrac{1}{2^n}$.
8. Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $a = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.
   On a : $\quad a = \sqrt{3} - \mathrm{i} = 2 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{2}\right) = 2 \times \left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.
9. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{(1+\mathrm{i})^n}{2^n}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1, \quad$ donc : $\quad \dfrac{(1+\mathrm{i})^n}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
10. Résoudre l'équation : $\quad 2x^4 - 3x^2 - 2 = 0 \quad$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, puis d'inconnue $x \in \mathbb{C}$.
   On reconnaît une équation homogène en x^2.
   Or pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\quad 2z^2 - 3z - 2 = 2(z-2)\left(z + \dfrac{1}{2}\right), \quad$ donc pour tout $x \in \mathbb{C}$:
$$2x^4 - 3x^2 - 2 = 2(x^2-2)\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\left(x^2 + \dfrac{1}{2}\right) \\ 2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\left(x + \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right). \end{cases}$$
   Les solution réelles sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, et les solutions complexes sont $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ et $-\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.

Exercice 2

Pour tout entier non nul $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-\frac{n}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Dans cette question, on fixe l'entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) La fonction f_n est-elle continue en 0 ? Justifier.
   Par produit : $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0 \quad$ donc f_n est continue à gauche, et par croissance comparée : $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} f_n(x) = -\infty, \quad$ donc f_n n'est pas continue à droite.
   Conclusion : f_n n'est pas continue en 0.

(b) Étudier les limites de f_n en $+\infty$ et $-\infty$.

Par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

(c) Justifier que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et calculer f_n'.

Par produit et composée, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f_n'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-\frac{n}{x}} + x \times \frac{n}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{n}{x}} = \left(1 + \frac{n}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{n}{x}}.$$

(d) Dresser le tableau de variation complet de f_n sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f_n'(x) = \dfrac{x+n}{x} \times \mathrm{e}^{-\frac{n}{x}}$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$-n\mathrm{e}$	$\searrow$	$-\infty$ || 0	$\nearrow$	$+\infty$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation : $f_n(x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une unique solution, qu'on note u_n.

La fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc l'équation possède au plus une solution.

Mais : $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x) = 0$ et : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, et comme f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, l'équation possède au moins une solution d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Conclusion : l'équation possède exactement une solution.

En fait, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(1) = \mathrm{e}^{-n} < 1$, et comme f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient : $u_n \geq 1$.

(b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone.

On pourra commencer par calculer et simplifier $f_{n+1}(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$f_{n+1}(u_n) = u_n\mathrm{e}^{-\frac{n+1}{u_n}} = u_n\mathrm{e}^{-\frac{n}{u_n}} \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{u_n}} = f_n(u_n) \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{u_n}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{u_n}} < 1 = f_{n+1}(u_{n+1}).$$

Comme f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, c'est que : $u_n < u_{n+1}$.

(c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

La suite est strictement croissante, donc possède une limite $\ell \in [1, +\infty[\cup \{+\infty\}$ d'après le théorème de la limite monotone.

Si $\ell \in [1, +\infty[$, alors en passant à la limite dans la relation : $u_n\mathrm{e}^{-\frac{n}{u_n}} = 1$, et par composition, il vient : $0 = 1$, ce qui est absurde.

Donc : $\ell = +\infty$.

4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \ln(u_n) = n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De la relation : $u_n \mathrm{e}^{-\frac{n}{u_n}} = 1$, il vient : $\ln(u_n) - \dfrac{n}{u_n} = 0$, et donc : $u_n \ln(u_n) = n$.

(b) Étudier la limite : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x) + \ln\big(\ln(x)\big)}{\ln(x)}$.

En déduire la limite de $\dfrac{\ln(n)}{\ln(u_n)}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour tout $x > 1$: $\dfrac{\ln(x) + \ln\big(\ln(x)\big)}{\ln(x)} = 1 + \dfrac{\ln\big(\ln(x)\big)}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ par croissance comparée.

Ainsi : $\dfrac{\ln(n)}{\ln(u_n)} = \dfrac{\ln\big(u_n \ln(u_n)\big)}{\ln(u_n)} = \dfrac{\ln(u_n) + \ln\big(\ln(u_n)\big)}{\ln(u_n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ par composition des limites.

(c) Montrer que la suite $\left(u_n \dfrac{\ln(n)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et préciser la limite.

Enfin : $u_n \times \dfrac{\ln(n)}{n} = \dfrac{u_n \ln(u_n)}{n} \times \dfrac{\ln(n)}{\ln(u_n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ par produit.

Exercice 3

On note (E) l'équation : $x^3 + 3x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que (E) possède une unique solution.

Vous n'essaierez pas de la calculer, c'est l'objectif de la suite de l'exercice.

La fonction $x \overset{\varphi}{\mapsto} x^3 + 3x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = 3x^2 + 3 > 0.$$

Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Or : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty$ et : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$, et comme φ est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une unique racine.

On note ρ l'unique solution de (E).

(b) Justifier que : $\rho \in]0,1[$, puis que : $\rho = \dfrac{1}{\rho^2 + 3}$.

On a : $\varphi(0) = -1 < 0$ et : $\varphi(1) = 3 > 0$, donc $\rho \in]0,1[$.

Par ailleurs : $\rho^3 + 3\rho - 1 = 0 \iff \rho(\rho^2 + 3) = 1 \overset{\rho^2+3 \neq 0}{\iff} \rho = \dfrac{1}{\rho^2 + 3}$.

On note f la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 3}$ sur $\mathbb{R}$, et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\rho_0 = 0 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N} : \quad \rho_{n+1} = f(\rho_n) = \frac{1}{\rho_n^2 + 3}.$$

On **admet** que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\rho_n \in [0,1]$.

2. Donner $f(0)$ et $f(1)$. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0,1]$.

   On a : $f(0) = \dfrac{1}{3}$ et $f(1) = \dfrac{1}{4}$.

   La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x \in]0,1]$: $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+3)^2} < 0$, donc f est strictement décroissante sur $[0,1]$.

3. (a) Déterminer un réel $k \in]0,1[$ pour lequel : $\forall x \in [0,1], \quad |f'(x)| \leq k$.

   Par quotient, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $|f'(x)| = \dfrac{2x}{(x^2+3)^2} \leq \dfrac{2 \times 1}{(0+3)^2} = \dfrac{2}{9}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\rho_{n+1} - \rho| \leq k|\rho_n - \rho|$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\rho_n, \rho \in [0,1]$, l'inégalité des accroissements assure que :

$$|\rho_{n+1} - \rho| = |f(\rho_n) - f(\rho)| \leq \frac{2}{9} \times |\rho_n - \rho|.$$

4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\rho_n - \rho| \leq k^n$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $|\rho_n - \rho| \leq k^n$ ».

   Initialisation. On a : $|\rho_0 - \rho| = \rho < 1 = k^0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Aussitôt :

$$|\rho_{n+1} - \rho| \overset{\text{Q3.}}{\leq} k|\rho_n - \rho| \overset{\text{HR}}{\leq} k \times k^n = k^{n+1}.$$

   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion. Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\rho_n - \rho| \leq k^n$.

5. (a) Montrer finalement que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ρ.

   Comme : $0 \leq k < 1$, on a : $k^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Par encadrement : $\rho_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \rho$.

   (b) Déterminer un entier N pour lequel : $|\rho_N - \rho| \leq 10^{-20}$. *Vous détaillerez votre raisonnement.*

   Un entier N tel que : $k^N \leq 10^{-20}$ convient. Or :

$$k^N \leq 10^{-20} \iff N\ln(k) \leq -20\ln(10) \iff N \geq \frac{-20\ln(10)}{\ln(k)}.$$

   On a : $\dfrac{-20\ln(10)}{\ln(k)} \approx 30,6$, donc : $N = 31$ convient.

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Résoudre l'équation : $\cos(n\theta) = -1$ d'inconnue $\theta \in [0, 2\pi[$. Combien y a-t-il de solutions à cette équation ?

   Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos(n\theta) = -1 \iff n\theta \equiv \pi \ (2\pi) \iff \exists k \in \mathbb{Z}/ \quad \theta = \dfrac{\pi}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$.

   Les solutions dans $[0, 2\pi[$ sont $\dfrac{\pi}{n}, \dfrac{3\pi}{n}, \ldots, \dfrac{(2n-1)\pi}{n}$ — il y en a n.

(b) Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. On pose : $z = \rho\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big) \in \mathbb{C}$.
Donner sans démonstration une forme trigonométrique de z^n.
On a : $z^n = \rho^n\big(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)\big)$.

(c) En déduire les solutions de l'équation : $z^n = -1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z^n = -1 &\iff \rho^n\big(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)\big) = 1 \times \big(\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)\big) \\ &\iff \rho^n = 1 \quad \text{et} \quad n\theta \equiv \pi \quad (2\pi) \\ &\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\} / \quad z = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note (E_n) l'équation : $\bar{z}(z-1) = z^n(\bar{z}-1)$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

2. (a) Résoudre l'équation (E_0), c'est-à-dire l'équation $\bar{z}(z-1) = \bar{z} - 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} \bar{z}(z-1) = \bar{z} - 1 &\iff (a - ib)(a + ib - 1) = a - ib - 1 \\ &\iff a^2 + b^2 - a + ib = a - ib - 1 \\ &\iff a^2 + b^2 - 2a + 1 = 0 \quad \text{et} \quad 2b = 0 \\ &\iff b = 0 \quad \text{et } a^2 - 2a + 1 = 0 \\ &\iff z = 1. \end{aligned}$$

(b) Résoudre l'équation (E_1), c'est-à-dire l'équation $\bar{z}(z-1) = z(\bar{z}-1)$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\bar{z}(z-1) = z(\bar{z}-1) \iff \bar{z}z - \bar{z} = z\bar{z} - z \iff z - \bar{z} = 0 \iff z \in \mathbb{R}$.

Dans la suite de l'exercice, on fixe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq 2$.

3. (a) Montrer que 0 est solution de (E_n).
On a : $\bar{0}(0-1) = 0$ et $0^n(\bar{0}-1) = 0$, donc 0 est solution de (E_n).

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ une solution **non nulle** de (E_n).

(b) Montrer que : $|z_0| = 1$.
En prenant le module : $|\bar{z}_0(z_0 - 1)| = |z_0^n(\bar{z}_0 - 1)|$.
Or pour tout $Z, Z' \in \mathbb{C}$: $|\bar{Z}| = |Z|$ et $|ZZ'| = |Z| \times |Z'|$, donc on obtient :

$$|z_0| \times |z_0 - 1| = |z_0|^n \times |z_0 - 1| \quad \text{c'est-à-dire} \quad |z_0| \times |1 - z_0| \times (1 - |z_0|^{n-1}) = 0.$$

Donc, comme $n \geq 2$, : $\underbrace{z_0 = 0}_{\text{exclu}}$ ou $z_0 = 1$ ou $|z_0|^{n-1} = 1$, donc : $|z_0| = 1$.

(c) Montrer que : $\overline{z_0} = \dfrac{1}{z_0}$, puis que : $(z_0 - 1)(z_0^n + 1) = 0$.
On a : $|z_0| = 1 \iff |z_0|^2 = 1$. Or : $|z_0|^2 = z_0\overline{z_0}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\bar{z}_0(z_0-1)=z_0^n(\bar{z}_0-1) &\overset{\bar{z}_0=\frac{1}{z_0}}{\iff} \frac{1}{z_0}(z_0-1)=z_0^n\left(\frac{1}{z_0}-1\right)\\ &\overset{\times z_0\neq 0}{\iff} (z_0-1)=z_0^n(1-z_0)\\ &\iff (z_0-1)(z_0^n+1)=0.\end{aligned}$$

(d) En déduire les valeurs possibles pour z_0.
Ainsi : $z_0=1$ ou $z_0^n=-1$, donc d'après la question 1 :

$$z_0\in\left\{1,\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)\right\}_{k=0,\dots,n-1}.$$

(e) En déduire toutes les solutions de (E_n) lorsque $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$.
On a vu que 0 est solution, et que toute autre solution est nécessairement soit égale à 1 soit de la forme $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)$ pour $k\in\{0,\dots,n-1\}$. Or on vérifie que réciproquement toutes ces possibilités sont solutions de (E_n). On a donc bien identifié toutes les solutions : 0, 1 et $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)$ pour $k\in\{0,\dots,n-1\}$.

Exercice 5

Dans cet exercice, on fixe un entier naturel $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question, $y_0,\dots,y_n$ sont des nombres **réels positifs**, et Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\{y_0,\dots,y_n\}$.

(a) Montrer l'*inégalité de Markov* : $\forall\varepsilon>0,\quad \mathbb{E}(Y)\geq\varepsilon\mathbb{P}(Y\geq\varepsilon)$.
Indication. Vous pourrez partir de la définition de l'espérance.
Soit $\varepsilon>0$. On a :

$$\mathbb{E}(Y)=\sum_{k=0}^{n}y_k\mathbb{P}(Y=y_k)\geq\sum_{y_k\geq\varepsilon}y_k\mathbb{P}(Y=y_k)\geq\sum_{y_k\geq\varepsilon}\varepsilon\mathbb{P}(Y=y_k)=\varepsilon\mathbb{P}(Y\geq\varepsilon).$$

Dans la question suivante, on note m l'espérance de Y, et σ^2 sa variance.

(b) En déduire l'*inégalité de Bienaymé-Chebychev* : $\mathbb{P}(|Y-m|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.
Pour commencer : $\mathbb{P}[|Y-m|\geq\varepsilon]=\mathbb{P}[(Y-m)^2\geq\varepsilon^2]$.
Appliquons à présent l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(Y-m)^2$:

$$\mathbb{P}\big((Y-m)^2\geq\varepsilon^2\big)\leq\frac{\mathbb{E}\big((Y-m)^2\big)}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Une population de personnes présente une maladie avec une proportion inconnue $p \in]0,1[$. On choisit un échantillon de n personnes, et on pose $X_i = 1$ si le i-ième individu est malade, 0 sinon. On considère que les variables aléatoires X_i ainsi définies sont indépendantes et suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p.

2. Quelle est la loi suivie par $S_n = X_1 + \cdots + X_n$? Rappeler l'espérance et la variance de S_n.
   On a : $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$, donc : $\mathbb{E}(S_n) = np$ et $\mathbb{V}(S_n) = np(1-p)$.

3. (a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$: $0 \leq x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$.
   Par produit : $\forall x \in [0,1], \quad x(1-x) \geq 0$.
   Pour tout $x \in [0,1]$:
   $$x(1-x) - \frac{1}{4} = -x^2 + x - \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0.$$
   (b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$: $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.
   Vous pourrez appliquer l'inégalité de Bienaymé-Chebychev.
   On a : $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|S_n - np| > n\varepsilon\right)$.
   D'après l'inégalité de Bienaymé-Chebychev : $\mathbb{P}\left(|S_n - np| > n\varepsilon\right) \leq \dfrac{np(1-p)}{(n\varepsilon)^2} = \dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$.
   D'après la question précédente : $\dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

4. Pour $\varepsilon = 0,01$, quelle taille N de l'échantillon doit-on choisir pour que S_N/N soit voisin de p à ε-près avec une probabilité supérieure à 95% ?
   On cherche un entier N tel que : $\dfrac{1}{4N \times 0,01^2} \leq 0,05$, c'est à dire $N \geq \dfrac{1}{4 \cdot 10^{-4} \times 0,05} = 500$.
   Par exemple $N = 500$ convient.

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, et on considère les points $A(-3;1)$, $B(1;5)$ et $C(3;-3)$.

1. Donner les coordonnées du centre de gravité [1] du triangle ABC. On le notera G dans la suite.
   On a : $G = \dfrac{1}{3}(A+B+C)$, d'où $G\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

2. (a) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de A.
   Pour tout $M(x;y)$:
   $$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \iff \begin{pmatrix} x+3 \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} = 0 \iff x - 4y + 7 = 0.$$

1. On rappelle que le *centre de gravité* du triangle ABC est le point de concours des médianes. C'est aussi le barycentre du système $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$.

(b) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de B.

Pour tout $M(x;y)$:

$$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \iff \begin{pmatrix}x-1\\y-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}=0 \iff 3x-2y+7=0.$$

(c) En déduire les coordonnées de l'orthocentre [2] de ABC. On le notera H dans la suite.

Pour tout $M(x;y)$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 4y & = & -7\\ 3x & - & 2y & = & -7\end{array}\right. \overset{\text{substitution}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4y-7\\ 3(4y-7)-2y & = & -7\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{7}{5}\\ x & = & -\dfrac{7}{5}\end{array}\right.$$

D'où $H\left(-\dfrac{7}{5};\dfrac{7}{5}\right)$.

3. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble d'équation cartésienne : $\quad x^2-\dfrac{12}{5}x+y^2-\dfrac{8}{5}y-\dfrac{78}{5}=0.$

(a) Déterminer $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tel que : $\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad x^2-\dfrac{12}{5}x=(x-\alpha)^2+\beta.$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\quad (x-\alpha)^2+\beta=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta.$

On peut choisir α,β tels que : $\quad 2\alpha=\dfrac{12}{5}\quad$ et $\alpha^2+\beta=0$, $\quad$ c'est-à-dire : $\quad \alpha=\dfrac{6}{5}\quad$ et $\quad \beta=-\dfrac{36}{25}$.

(b) Montrer que $\mathcal{E}$ est un cercle, dont on précisera son centre Ω et son rayon R.

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} x^2-\frac{12}{5}x+y^2-\frac{8}{5}y-\frac{78}{5}=0 &\iff \left(x-\frac{6}{5}\right)^2-\frac{36}{25}+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{16}{25}-\frac{78}{5}=0\\ &\iff \left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{442}{25}. \end{aligned}$$

On reconnaît le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{4}{5}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{442}}{5}$.

(c) Montrer que $\mathcal{E}$ est le cercle circonscrit [3] au triangle ABC.

On sait que $\mathcal{E}$ est un cercle. S'il passe par A, B et C, c'est le cercle circonscrit au triangle.

Or on vérifie que : $\quad (-3)^2-\dfrac{12}{5}\times(-3)+(1)^2-\dfrac{8}{5}\times(1)-\dfrac{78}{5}=0,\quad$ donc $A\in\mathcal{E}$.

De même, on vérifie que $B,C\in\mathcal{E}$.

Ainsi, $\mathcal{E}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

4. Montrer que les points H, Ω et G sont alignés.

On calcule : $\quad [\overrightarrow{\Omega H},\overrightarrow{\Omega G}]=\begin{vmatrix}-\dfrac{13}{5} & -\dfrac{13}{15}\\ \dfrac{3}{5} & \dfrac{1}{5}\end{vmatrix}=0,\quad$ donc Ω, H et G sont alignés.

2. On rappelle que l'*orthocentre* du triangle ABC est le point de concours des hauteurs.

3. On rappelle que le *centre du cercle circonscrit* du triangle ABC est le point de concours des médiatrices. C'est aussi le centre de l'unique cercle passant par A, B et C.

Exercice 7

On pose : $\quad I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$

1. (a) Justifier que I est bien définie.

   La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale I est bien définie.

   (b) Montrer que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\quad \displaystyle\int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = x.$

   Vous commencerez par montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est dérivable sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$, et calculerez sa dérivée.

   D'après le TFCI, la fonction $x \overset{\psi}{\mapsto} \displaystyle\int_0^{x} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

   Par composition, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \psi\big(\tan(x)\big)$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$, et sa dérivée vaut :

   $$(\psi \circ \tan)'(x) = \tan'(x) \times \psi'\big(\tan(x)\big) = \big(1+\tan(x)^2\big) \times \frac{1}{1+\tan(x)^2} = 1.$$

   Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\quad \forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[, \quad (\psi \circ \tan)(x) = x + \lambda.$

   En évaluant en 0, il vient : $\quad \lambda = 0.$

   (c) En déduire la valeur de I.

   Évaluons la dernière expression en $\dfrac{\pi}{4}$: $\quad I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\tan(\frac{\pi}{4})} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\quad J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t.$

   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{n+1}.$

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$: $\quad 0 \leq \dfrac{t^n}{1+t^2} \leq t^n, \quad$ donc par croissance de l'intégrale :

   $$0 \leq J_n \leq \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

   (b) En déduire la limite de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Par encadrement : $\quad J_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

3. Dans cette question, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\quad \dfrac{1}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $-t^2 \neq 1$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)} = \frac{1}{1+t^2} - (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2},$$

d'où : $\displaystyle \frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

(b) En déduire que : $\displaystyle I = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1}J_{2n+2}$.

On a :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Q3.a)}}{=} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{linéarité}}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 t^{2k}\mathrm{d}t + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{simplification}}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1}J_{2n+2}.
\end{aligned}$$

(c) Expliquer comment obtenir une approximation rationnelle de π à 10^{-10} près.

D'après ce qui précède : $\displaystyle \left| I - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right| = J_{2n+2} \leq \frac{1}{2n+3}$, et donc :

$$\left|\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \frac{1}{2n+3} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left|\pi - 4\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \frac{4}{2n+3}.$$

Pour obtenir une approximation rationnelle de π à 10^{-10} près, il suffit de trouver N tel que : $\displaystyle \frac{4}{2N+3} \leq 10^{-10}$, c'est-à-dire : $\displaystyle N \geq 2\cdot 10^{10} - \frac{3}{2}$, puis de calculer $\displaystyle 4\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG / ANALYSTES STATISTICIENS

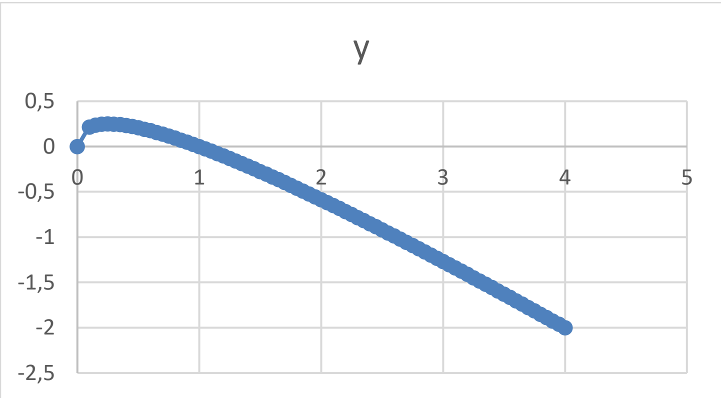
ISE cycle long / AS

Corrigé de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

Soit l'application *f* définie sur R^+ par : $f\ (x) = \sqrt{x} - x$.

1. Étudier les variations de *f* et donner l'allure de son graphe.
La dérivée de la fonction est égale à : $\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$ s'annule pour *x*=1/4.
La fonction est croissante entre 0 et ¼, et décroissante après.
On a : $\lim\limits_{x\to\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x\to\to+\infty} (f(x) + x) = +\infty$, par conséquent le graphe admet une branche parabolique dans la direction *y*=-*x*.
De plus la tangente est verticale à l'origine et *f*(0)=*f*(1)=0 et *f*(1/4)=1/4.



2. Calculer $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx$, où *n* est un entier naturel non nul.
On a : $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx = \int_0^1 \left(x^{n+\frac{1}{2}} - x^{n+1}\right) dx = \frac{1}{(n+2)(2n+3)}$.

3. Calculer $J = \int_2^3 \frac{1}{f(x)}\, dx$.
On effectue un changement de variable : $t = \sqrt{x}$, et on obtient : $J = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2}{1-t} dt = 2\, Ln \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-1}\right)$.

Exercice n° 2

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par :

$f(x)=-x-\sqrt{x^2-1}$ et $g(x)=-x+\sqrt{x^2-1}$

1. Étudier les variations de f et g sur $[1,+\infty[$.

La dérivée de f est $f'(x)=-1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}<0$ et la fonction est décroissante de -1 à $-\infty$ sur l'intervalle d'étude (la fonction n'est pas dérivable à droite en 1).

La dérivée de g est $g'(x)=-1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>0$ et la fonction est croissante de -1 à 0 (la fonction tend vers 0 à plus l'infini).

2. Pour $k\in N$, non nul, on pose : $I_k=\left[-k+\sqrt{k^2-1},+\infty\right[$ et $J_k=\left]-\infty,-k-\sqrt{k^2-1}\right]$. Montrer que ces deux suites (I_k) et (J_k) sont des suites monotones de segments emboîtés pour l'inclusion.

Comme g est croissante, on a : $I_{k+1}\subset I_k$
Comme f est décroissante, on a : $J_k\subset J_{k+1}$

3. Pour k entier naturel non nul, on pose : $f_k(x)=\sqrt{x^2+2kx+1}$. Donner l'ensemble de définition de $f_k(x)$ en fonction de I_k et J_k, et en déduire l'ensemble de définition de la fonction numérique φ_n définie par : $\varphi_n(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x^2+2kx+1}\right)-\sqrt{n^2x^2+1}$, où n est un entier naturel strictement supérieur à 1.

La résolution de l'inéquation $x^2+2kx+1\geq 0$, montre que le domaine de définition de $f_k(x)$ est $I_k\cup J_k$ et on en déduit que le domaine de définition de φ_n est $I_n\cup J_n$.

4. Calculer $\underset{x\to+\infty}{Lim}\left[f_k(x)-\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}\right]$ et en déduire $\underset{x\to+\infty}{Lim}\,\varphi_n(x)$.

$$\underset{x\to+\infty}{Lim}\left[f_k(x)-\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right]=k \text{ et } \underset{x\to+\infty}{Lim}\,\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice n° 3

Soit la fonction *f* définie sur $R - \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x}$.

1. Etudier les variations de *f* et tracer son graphe.

La fonction peut s'écrire : $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x} = x - 1 + \dfrac{2}{1+x}$. Cette fonction admet la droite d'équation $y=x-1$ comme asymptote oblique et la droite $x=-1$ comme asymptote verticale.

Sa dérivée est égale à : $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{(1+x)^2} = \dfrac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}$ et elle s'annule pour $x = -1 \pm \sqrt{2}$.

Par ailleurs, $f(-1-\sqrt{2}) = -\dfrac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ et $f(-1+\sqrt{2}) = \dfrac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Tableau des variations :

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	-1	-1	$-1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	-		+
$f(x)$	$-\infty$ ↗		↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘		↗ $+\infty$

On a une hyperbole non équilatère.

2. Montrer que le graphe de *f* admet un centre de symétrie que l'on précisera.

On pose $Y = y + 2;\ X = x + 1$ pour obtenir la fonction impaire : $Y = X + \dfrac{2}{X}$. Le point de coordonnées (-1,2) est donc un centre de symétrie (point d'intersection des deux asymptotes).

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + 2\,Ln(x+1)\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 2\,Ln\,2$$

4. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes *C*, l'équation : $f(z) = 1 + i$, où la fonction *f* est prolongée sur $C - \{-1\}$.

On pose $z = x + i\,y$, d'où $1 + (x+i\,y)^2 = (1+i)(1+x+i\,y)$, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} 1 + x - y = 1 + x^2 - y^2 \\ 1 + x + y = 2xy \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} (x-y)(x+y-1) = 0 \\ 1 + x + y = 2xy \end{cases}$$

Si $x + y - 1 = 0$, alors dans la deuxième ligne, on obtient : $-x^2 + x - 1 = 0$ qui n'admet pas de racines réelles.

Si $x - y = 0$, alors dans la deuxième ligne, on obtient : $2x^2 - 2x - 1 = 0$, soit $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} = y$

Exercice n° 4

1. Étudier la suite $(u_n)_{1\leq n}$ de nombres réels définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n \sin(u_n)$ et $0 < u_1 < 1$.

On vérifie aisément par récurrence que : $0 < u_{n+1} < 1$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sin(u_n) < 1$. La suite est donc décroissante et minorée, elle converge vers une limite *l* solution de l'équation : $l = l \sin(l)$, soit l=0.

2. Étudier la suite $(v_n)_{1\leq n}$ définie par la relation de récurrence : $v_{n+1} = Ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

On a : $v_{n+1} = Ln\left(\sin(u_n)\right) \approx Ln(u_n) \to -\infty$ (car la suite u_n tend vers zéro).

Exercice n° 5

On considère les deux fonctions *f* et *g* définies sur l'ensemble des nombres réels positifs par : $f(x) = Ln(x+e)$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$. On note x_0 la solution de l'équation $\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)} = 1$ et on admet que $x_0 \approx 3{,}7$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$

On considère la fonction : $h(x) = f(x) - g(x)$, sa dérivée est égale à :

$h'(x) = \frac{1}{x+e} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2\sqrt{x+1} - (x+e)}{2(x+e)\sqrt{x+1}}$. Le dénominateur est positif et on pose $u(x) = 2\sqrt{x+1} - (x+e)$, dont la dérivée est strictement négative, et *u* est à valeurs dans $\left[2-e, -\infty\right[$. La dérivée de *h* est donc négative et la fonction est décroissante négative. Par conséquent, seule *x*=0 est solution de l'équation.

2. Dans une course à pied de 15 kms, après 15 minutes de course, les deux concurrents en tête (A et B) se trouvent sur une même ligne. On note *x* la distance restante à parcourir (en kms), que l'on suppose supérieure à x_0. On fait alors l'hypothèse *H* suivante :

> *H* : La probabilité que le coureur A gagne la course est égale à $\frac{1}{f(x)}$ et la probabilité que ce soit B est égale à $\frac{1}{g(x)}$.

L'hypothèse *H* a-t-elle un sens ? Sous cette hypothèse, qui a le plus de chance de gagner la course entre A et B ?

On a, pour x positif, $f(x)$ et $g(x)$ minorés par 1, donc les valeurs $\frac{1}{f(x)}$ et $\frac{1}{g(x)}$ sont comprises entre zéro et 1 et peuvent correspondre à des probabilités. Pour que l'hypothèse *H* ait un sens, il faut de plus que la somme de ces probabilités soit inférieure à 1. Or la fonction $\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)}$ est décroissante comme somme de deux fonctions décroissantes ($\frac{1}{f(x)}$ et $\frac{1}{g(x)}$ sont effectivement décroissantes en tant qu'inverse de fonctions croissantes). Ainsi pour tout $x > x_0$,

$$\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)} < \frac{1}{f(x_0)} + \frac{1}{g(x_0)} = 1.$$

L'hypothèse H a donc bien un sens.

Soit à présent $y = f(x) - g(x) = Ln(x+e) - \sqrt{x+1}$ sur R^+, d'après la première question y est décroissante et négative. En conclusion : $f(x) \leq g(x)$ ce qui signifie que A a plus de chances de gagner la course. On peut remarquer que le résultat ne dépend pas de la distance à parcourir, ni de l'instant où les deux coureurs sont sur la même ligne.

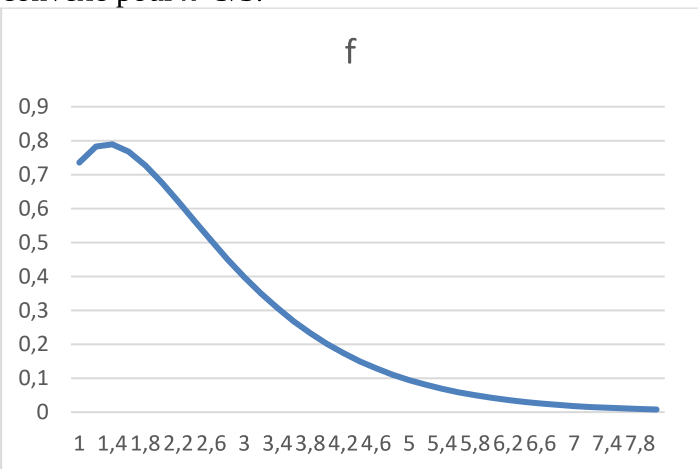
Exercice n° 6

Le profil d'un toboggan est modélisé (représenté) par une fonction *f* définie sur l'intervalle $[1,8]$ (unité de mesure en mètres) par : $f(x) = (ax+b)e^{-x}$, où *a* et *b* sont deux entiers naturels. On donne $e \approx 2{,}7$; $e^{-1} \approx 0{,}37$ et $e^{-8} \approx 0$.

1. Seulement dans cette question *a*=3 et *b*=1. Étudier les variations de *f* et sa convexité. Tracer son graphe.

On obtient $f'(x) = (2-3x)e^{-x}$. Cette dérivée est toujours négative sur l'intervalle considéré et la fonction est décroissante de $[1,8]$ sur $[4/e, 25/e^8]$

Sa dérivée seconde est égale à : $f''(x) = (3x-5)e^{-x}$. La fonction est concave pour *x*<5/3 et convexe pour *x*>5/3.



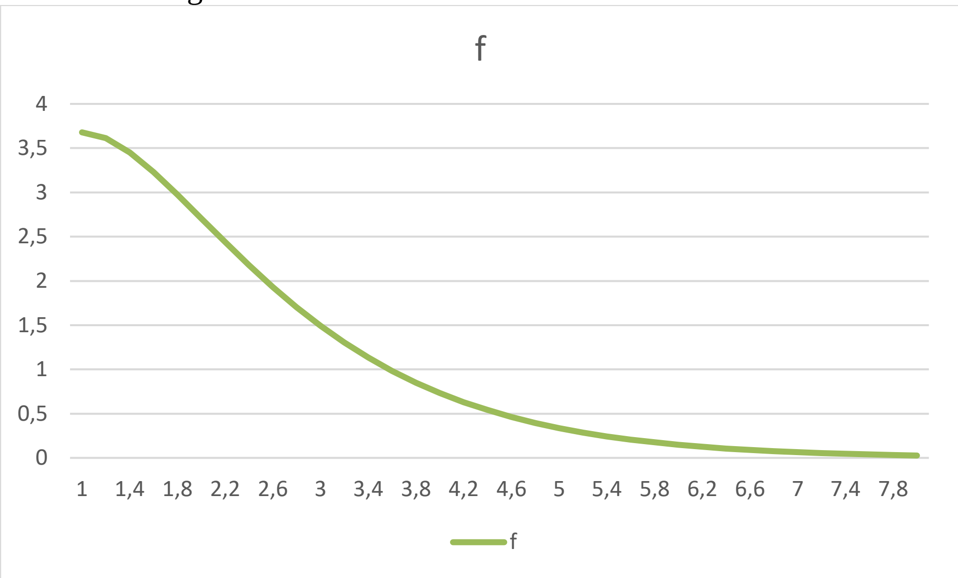
2. Déterminer la valeur de *b* pour que la demie tangente au graphe de *f* au point d'abscisse 1 soit horizontale.

Il faut que la dérivée soit nulle en 1, soit $f'(x) = (-ax-b+a)e^{-x}$ et $f'(1) = (-b)e^{-1} = 0$, donc *b*=0.

3. On souhaite de plus que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut. Déterminer la valeur de *a* et représenter ce tobogan.

On a : $f(x) = axe^{-x}$ et pour x=1, $3{,}5 \leq y = f(1) = \frac{a}{e} \leq 4$. Comme $e \approx 2{,}7$, on obtient a=10.

Allure du tobogan :



4. Le mur de soutènement du toboggan (partie entre le sol et le toboggan) sera peint par un artisan sur une seule face. Sur le devis proposé, l'artisan demande un forfait de 200 euros augmenté de 30 euros par mètre carré peint. Quel sera le montant du devis ?

Calculons la surface à peindre, soit $I = \int_1^8 10xe^{-x}\,dx$. En intégrant par parties, on obtient :

$$I = [-10xe^{-x}]_1^8 + \int_1^8 10e^{-x}dx = -80e^{-8} + 10e^{-1} + 10[-e^{-x}]_1^8 = -90e^{-8} + 20e^{-1} \approx 7{,}4$$

Donc le devis sera de 200+30*7,4=422 euros.