ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ de la 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est composée d'un exercice et d'un problème, indépendants, à traiter dans un ordre quelconque. Le problème comporte cinq parties qu'il est recommandé d'aborder dans l'ordre proposé.

Exercice 1 :
On considère la somme S(n) = $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$, où n est un nombre entier supérieur ou égal à 1.
1) Calculer S(1), S(2), S(3), S(4).
Que remarquez-vous à partir de ces résultats ?

2) Trouver la valeur de S(n) en fonction de n.
Indication : on pourra soit passer par un calcul direct, soit procéder par récurrence.

Corrigé :
1) S(n) est la somme des n premiers nombres impairs.
S(1) = 1
S(2) = 1 + 3 = 4 = 2^2
S(3) = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2
S(4) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2

2) Calcul direct :
Premier calcul : S(n) = 2 ($\sum_{k=1}^{n} k$) – n = 2n(n+1)/2 – n = n^2

Deuxième calcul : S(n) est égal à la somme des 2n premiers nombres entiers moins la somme des n premiers entiers pairs.

$S(n) = \sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{n} 2k$

$\sum_{k=1}^{2n} k = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$

$\sum_{k=1}^{n} 2k = 2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$

D'où $S(n) = 2n^2 + n - n^2 - n = n^2$

Récurrence :
Hypothèse H_0 : $S(n) = n^2$
Vrai pour n = 1
Supposons H_0 vraie en n.
$S(n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$

Problème :

Les symboles e et Ln désignent respectivement l'exponentielle (e = 2,718) et le logarithme népérien.

On donne la valeur de l'intégrale $G = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$: $G = \sqrt{\pi}$.

Les paramètres a et b sont des entiers naturels positifs ou nuls ; on considère la famille de fonctions $f_{a,b}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$x \rightarrow f_{a,b}(x) = \frac{e^{-(\mathrm{Ln}\,x)^b}}{x^a} = \frac{\exp[-(\mathrm{Ln}\,x)^b]}{x^a}$$

Partie 1 :

Dans cette première partie, on prend b = 0. La fonction est notée $f_{a,0}$.

1) On désire étudier précisément les variations de la fonction $f_{a,0}$.

Selon les valeurs de a, calculer les dérivées première et seconde, $f'_{a,0}$ et $f''_{a,0}$ de $f_{a,0}$. Quel est leur signe ?

2) Donner les limites de $f_{a,0}$ quand $x \to 0$ et quand $x \to +\infty$.

3) Etablir le tableau de variations de $f_{a,0}$. Donner la forme du graphe C(a,0) de $f_{a,0}$.

4) Soient a et a' deux entiers de $\mathbb{N}$, avec a' > a.

Comparer les positions respectives des graphes C(a,0) et C(a',0) des fonctions $f_{a,0}$ et $f_{a',0}$.

5) Donner, selon les valeurs de a, une primitive de $f_{a,0}$.

6) Dans cette question, on prend b = 1. Montrer que $f_{a,1}$ peut s'écrire sous la forme $k.f_{a',0}$ pour laquelle on précisera la valeur de a' en fonction de a et la valeur de k.

1) Forme générale : $f_{a,0}(x) = x^{-a}/e$.
Pour a = 0, $f_{0,0}(x) = 1/e$, droite horizontale. Dans la suite on prendra $a \geq 1$.
Pour a = 1, $f_{1,0}(x) = 1/(e.x)$: hyperbole équilatère
Dérivée première : $f'_{a,0}(x) = -a/(e.x^{a+1})$.
Dérivée seconde : $f''_{a,0}(x) = a(a+1)/(e.x^{a+2})$
Comme a appartient à $\mathbb{N}$ et $x \geq 0$, $f'_{a,0}$ est négative et $f''_{a,0}$ est positive

2) Pour a=0, $f_{0,0}(x) = 1/e$ qui est donc la limite en $x \to 0$ et $x \to +\infty$.
Pour $a \geq 1$, $f_{a,0}(x) \to +\infty$ pour $x \to 0$, et $f_{a,0}(x) \to 0$ $x \to +\infty$.

3) Tableau de variations, pour a ≥ 1,

x	0		$+\infty$
$f''_{a,0}$		$+$	
$f'_{a,0}$		$-$	
$f_{a,0}$	$+\infty$	$\searrow$	0

4) Les courbes C(a,0) et C(a',0) associées aux fonctions $f_{a,0}$ et $f_{a',0}$ se coupent au point d'abscisse 1 et d'ordonnée 1/e.
Pour $x > 1$, $x^{a'} > x^a$ et donc $x^{-a'} < x^{-a}$; la courbe C(a',0) est en-dessous de C(a,0).
Inversement, pour $x < 1$, $x^{-a'} > x^{-a}$ et C(a',0) est en-dessus de C(a,0).

5) Primitives :
Pour a = 0, $F_{0,0}(x) = x/e + K$
Pour a = 1, $F_{1,0}(x) = Ln(x)/e + K$
Pour a > 1, $F_{a,0}(x) = x^{1-a}/(e.(1-a)) + K$

6) On a ici b = 1.
$f_{a,1}(x) = e^{-Ln\ x}/x^a$; or $e^{-Ln\ x} = e^{Ln(1/x)} = 1/x$
Donc $f_{a,1}(x) = 1/x^{a+1} = e.f_{a+1,0}(x) = e.f_{a',0}(x)$
On a donc k = e et a' = a+1.

Partie 2
Dans cette deuxième partie, on prend a = 0 et b = 2 ; la fonction est notée $f_{0,2}$.
7) Calculer la dérivée première de $f_{0,2}$; étudier les solutions de l'équation $f'_{0,2}(x) = 0$ et en déduire le signe de $f'_{0,2}$.
8) Calculer la dérivée seconde de $f_{0,2}$; étudier les solutions de l'équation $f''_{0,2}(x) = 0$ et en déduire le signe de $f''_{0,2}$.
9) Donner les limites de $f_{0,2}$ quand $x \to 0$ et quand $x \to +\infty$.
10) Calculer la limite de $f'_{0,2}$ quand x tend vers 0.
11) Montrer que $f_{0,2}$ passe par un maximum M dont on donnera les coordonnées x(M) et y(M).
Ecrire le tableau de variations de $f_{0,2}$ et donner la forme de son graphe C(0,2).
12) Calculer les intégrales $A = \int_0^{+\infty} f_{0,2}(x)\,dx$ et $B = \int_0^{+\infty} x f_{0,2}(x)\,dx$

7) $f_{0,2}(x) = e^{-(\mathrm{Ln}\ x)^2}$
De façon évidente, on a $f_{0,2}(x) > 0$.

Dérivée première :

On a : Ln $f_{0,2}(x) = -(\text{Ln } x)^2$

En dérivant :

$f'_{0,2}(x)/f_{0,2}(x) = -2\,\text{Ln}(x)/x$

D'où : $f'_{0,2}(x) = -2\,\frac{\text{Ln } x}{x}\,e^{-(\text{Ln } x)^2}$

$f'_{0,2}(x) = 0$ pour $x = 1$; pour $x < 1$, la dérivée est > 0 ; pour $x > 1$, elle est négative.

8) Dérivée seconde :

En dérivant une deuxième fois l'expression $f'_{0,2}(x)/f_{0,2}(x) = -2\,\text{Ln}(x)/x$, on obtient :

$[f_{0,2}(x)f''_{0,2}(x) - (f'_{0,2}(x))^2]/(f_{0,2}(x))^2 = -2\,(1-\text{Ln}(x))/x^2$

Il s'en suit :

$f''_{0,2}(x) = 2[2(\text{Ln}(x))^2 + \text{Ln}(x) - 1]f_{0,2}(x)\,/\,x^2$

$f''_{0,2}(x) = 0$ si et seulement si $[2(\text{Ln}(x))^2 + \text{Ln}(x) - 1] = 0$

Posons $X = \text{Ln}(x)$

L'équation $2X^2 + X - 1 = 0$ admet deux solutions X_1 et X_2 :

$X_1 = -1$ d'où $x_1 = 1/e \approx 0{,}37$

$X_2 = ½$ d'où $x_2 = e^{1/2} \approx 1{,}65$

9) Quand $x \to 0$, $f_{0,2}(x) \to 0$.

Quand $x \to +\infty$, $f_{0,2}(x) \to 0$.

10) Posons $u = \text{Ln}(x)$; quand x tend vers 0, u tend vers $-\infty$.

$f'_{0,2}(u) = -2u/e^{u(u+1)} \to 0$ quand $u \to -\infty$.

La pente à l'origine est horizontale.

11) D'après les questions 7 et 8, le maximum est atteint en un point M d'abscisse x(M) = 1 et donc d'ordonnée $y(M) = f_{0,2}(1) = 1$: M(1, 1).

Tableau de variations :

x	0		$1/e$		1		$e^{1/2}$		$+\infty$
$f''_{0,2}$		+	0		-		0	+	
$f'_{0,2}$		+			0		-		
$f_{0,2}$	0	↗			1	↘			0

On remarque que la courbe C(0, 2) présente deux points d'inflexion : le premier pour $x = 1/e$ (et donc d'ordonnée $1/e$) et le second pour $x = e^{1/2}$ (d'ordonnée $e^{-1/4}$).

12) A = $\int_0^{+\infty} f_{0,2}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-(Ln\,x)^2}\,dx$

Posons u = Ln(x) : u varie de - ∞ à +∞.

du = dx/x, dx = e^udu

A = $\int_{-\infty}^{+\infty} e^u e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u^2-u)} du$

$u^2 - u = (u - 1/2)^2 - 1/4$; en posant v = u – ½, on a :

A = $e^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv$

En utilisant le résultat donné en introduction :

A = $e^{1/4}\sqrt{\pi}$

Calcul de B = $\int_0^{+\infty} x f_{0,2}(x)\,dx$

En faisant le même changement de variable que pour le calcul de A, on obtient :

B = $\int_{-\infty}^{+\infty} e^u e^{-u^2} e^u du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u^2-2u)} du$

$u^2 - 2u = (u - 1)^2 - 1 = v^2 - 1$ en posant v = u – 1.

B = $e \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv$

B = $e\sqrt{\pi}$

Partie 3

Dans cette troisième partie, on prend a = 1 et b = 2 ; la fonction sera notée $f_{1,2}$.

13) Calculer les dérivées première et seconde de $f_{1,2}$; étudier les solutions des équations $f'_{1,2}(x) = 0$ et $f''_{1,2}(x) = 0$.

En déduire le signe de $f'_{1,2}$ et $f''_{1,2}$.

14) Donner les limites de $f_{1,2}$ quand x → 0 et quand x → +∞.

15) Montrer que $f_{1,2}$ passe par un maximum N dont on donnera les coordonnées x(N) et y(N).

16) En déduire le tableau de variations de $f_{1,2}$ et la forme de son graphe C(1,2).

17) Calculer l'intégrale C = $\int_0^{+\infty} f_{1,2}(x)\,dx$.

13) $f_{1,2}(x) = e^{-(Ln\,x)^2}/x$

Dérivée première :

$Ln(f_{1,2}(x)) = -(Ln\,x)^2 - Ln\,x$

En dérivant : $f'_{1,2}(x)/f_{1,2}(x) = -(2Ln(x) + 1)/x$

D'où :

$f'_{1,2}(x) = -(2Ln(x) + 1)e^{-(Ln\,x)^2}/x^2$

La dérivée première est nulle pour 2Ln(x) + 1 = 0, c'est-à-dire pour x = $e^{-1/2}$.

Pour x > $e^{-1/2}$, la dérivée $f'_{1,2}$ est négative.

Pour x < $e^{-1/2}$, la dérivée $f'_{1,2}$ est positive.

Dérivée seconde :

En faisant comme dans la question 8 de la Partie 2, on obtient :

$[f_{1,2}(x)f''_{1,2}(x) - (f'_{1,2}(x))^2]/(f_{1,2}(x))^2 = (2Ln(x) - 1)/x^2$

On en déduit :

$f''_{1,2}(x) = 2Ln(x)(2Ln(x) + 3)f_{1,2}(x)/x^2$

Comme $x > 0$ et $f_{1,2}(x) > 0$, $f''_{1,2}(x)$ s'annule pour Ln x = 1 et Ln x = -3/2, donc pour $x = e$ et $x = e^{-3/2}$.
La dérivée seconde est positive pour $x < e^{-3/2}$ et $x > e$; elle est négative sur l'intervalle $]e^{-3/2}, e[$.

14) Quand $x \to 0$, $f_{1,2}(x) \to 0$.
Quand $x \to +\infty$, $f_{1,2}(x) \to 0$.

15) Nous avons vu à la question 13 que la dérivée première s'annule en $x = e^{-1/2}$. L'ordonnée est $f_{1,2}(e^{-1/2}) = e^{1/4}$.
Le point N est donc de coordonnées $(x(N) = e^{-1/2},\ y(N) = e^{1/4})$.

16) Tableau de variations :

x	0		$e^{-3/2}$		$e^{-1/2}$		e		$+\infty$
$f''_{1,2}$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f'_{1,2}$			$+$		0		$-$		
$f_{1,2}$	0	↗			$e^{1/4}$		↘		0

La courbe C(1, 2) présente deux points d'inflexion : le premier pour $x = e^{-3/2}$ (et donc d'ordonnée $e^{-3/4}$) et le second pour $x = e$ (d'ordonnée e^{-2}).

17) Calcul de $C = \int_0^{+\infty} f_{1,2}(x)\,dx$.
Faisons le changement de variable $u = \text{Ln } x$, $du = dx/x$, u varie sur $\mathbb{R}$.
$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Partie 4
Dans cette quatrième partie, on prend b = 2 ; la fonction sera notée $f_{a,2}$.
18) Calculer les dérivées première et seconde de $f_{a,2}$; quelles sont les solutions des équations $f'_{a,2}(x) = 0$ et $f''_{a,2}(x) = 0$?
Donner le signe de $f'_{a,2}$ et $f''_{a,2}$.
19) Donner les limites de $f_{a,2}$ quand $x \to 0$ et quand $x \to +\infty$.
20) Montrer que $f_{a,2}$ passe par un maximum P dont on donnera les coordonnées x(P) et y(P).
21) Déterminer l'équation du lieu géométrique de P.
22) Donner le tableau de variations de $f_{a,2}$ et la forme de son graphe C(a,2).
23) Calculer l'intégrale $D = \int_0^{+\infty} f_{a,2}(x)\,dx$.

$f_{a,2}(x) = \dfrac{e^{-(\mathrm{Ln}\,x)^2}}{x^a}$

Remarque : pour a = 1, on retrouve la Partie 3

18) $\mathrm{Ln}(f_{a,2}(x)) = -(\mathrm{Ln}\,x)^2 - a\,\mathrm{Ln}(x)$

Dérivée première :

$f'_{a,2}(x)/f_{a,2}(x) = -\,(2\mathrm{Ln}(x) + a)/x$

$f'_{a,2}(x) = -\,(2\mathrm{Ln}(x) + a)f_{a,2}(x)/x$

$f'_{a,2}(x)$ s'annule pour $\mathrm{Ln}(x) = -a/2$, ou $x = e^{-a/2}$.

Signe :

Pour $x > e^{-a/2}$, la dérivée $f'_{a,2}$ est négative.

Pour $x < e^{-a/2}$, la dérivée $f'_{a,2}$ est positive.

Dérivée seconde :

$[f_{a,2}(x)f''_{a,2}(x) - (f'_{a,2}(x))^2]/(f_{a,2}(x))^2 = (2\mathrm{Ln}x + a - 2)/x^2$

On en déduit :

$f''_{a,2}(x) = [4(\mathrm{Ln}x)^2 + (4a+2)\mathrm{Ln}(x) + a^2 + a - 2)]f_{a,2}(x)/x^2$

Comme $x > 0$ et $f_{a,2}(x) > 0$, $f''_{a,2}(x)$ s'annule pour :

$4(\mathrm{Ln}(x))^2 + (4a+2)\mathrm{Ln}(x) + a^2 + a - 2 = 0$

En posant $X = \mathrm{Ln}(x)$, le discriminant Δ' de l'équation $4X^2 + 2(2a+1)X + a^2 + a - 2 = 0$ est égal à $(2a+1)^2 - 4(a^2 + a - 2) = 9$, donc il y a deux racines :

$X_1 = \mathrm{Ln}(x_1) = [-(2a+1) + 3]/4 = (1 - a)/2$, d'où $x_1 = e^{(1-a)/2}$

$X_2 = \mathrm{Ln}(x_2) = [-(2a+1) - 3]/4 = -(a+2)/2$, d'où $x_2 = e^{-(a+2)/2}$

La dérivée seconde est positive pour $x < x_2$ et $x > x_1$; elle est négative sur l'intervalle $]x_2\,, x_1[$.

Remarque 1: en calculant le ratio x_1/x_2, on trouve $x_1/x_2 = e^{3/2} > 1$ donc $x_1 > x_2$.

Remarque 2 : en faisant a = 1, on retrouve les résultats de la Partie 3.

19) Quand $x \to 0$, $f_{a,2}(x) \to 0$.

Quand $x \to +\infty$, $f_{a,2}(x) \to 0$.

20) A la question 18, on a établi que $f'_{a,2}$ s'annulait pour $x = e^{-a/2} = x(P)$.

On en déduit : $y(P) = e^{a^2/4}$.

21) Au point P, $\mathrm{Ln}\,x = -a/2$, donc $a = -2\mathrm{Ln}\,x$

$y(P) = e^{(\mathrm{Ln}\,x)^2}$

L'équation du lieu géométrique de P est $y = e^{(\mathrm{Ln}\,x)^2}$.

22) Tableau :

x	0		$e^{-(a+2)/2}$		$e^{-a/2}$		$e^{(1-a)/2}$		$+\infty$
$f''_{1,2}$		+	0		-		0	+	
$f'_{1,2}$		+			0	-			

$$\begin{array}{c|ccccc} & & & e^{a^2/4} & & \\ f_{1,2} & & \nearrow & & \searrow & \\ & 0 & & & & 0 \end{array}$$

23) Calcul de D = $\int_0^{+\infty} f_{a,2}(x)\,dx$.
Soit u = Ln x, x = e^u, dx = e^u du, u varie sur $\mathbb{R}$
D = $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(1-a)u}e^{-u^2}du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u^2+(a-1)u)}du$

$u^2 + (a-1)u = (u + (a-1)/2)^2 - (a-1)^2/4$
On pose v = u + (a-1)/2
D = $e^{(a-1)^2/4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}dv = e^{(a-1)^2/4}\sqrt{\pi}$.

Partie 5
Cette cinquième partie aborde le cas général $f_{a,b}$.
24) Calculer la dérivée première de $f_{a,b}$.
Etudier, selon les valeurs de b, l'existence de solutions de l'équation $f'_{a,b}(x) = 0$.
Quel est le signe de $f'_{a,b}$?
25) Donner les limites de $f_{a,b}$ quand x → 0 et quand x → +∞.
26) Montrer que toutes les courbes C(a, b) passent par un point fixe F dont on précisera les coordonnées.
Donner l'équation de la tangente en F à C(a, b).

24) $\mathrm{Ln}(f_{a,b}(x)) = -(\mathrm{Ln}\, x)^b - a\,\mathrm{Ln}(x)$
En dérivant : $f'_{a,b}(x)/f_{a,b}(x) = -[b(\mathrm{Ln}(x))^{b-1} + a]/x$

D'où : $f'_{a,b}(x) = -[b(\mathrm{Ln}(x))^{b-1} + a].f_{a,b}(x) / x$

Le signe de la dérivée dépend de l'expression $[b(\mathrm{Ln}(x))^{b-1} + a]$.

Considérons l'équation $f'_{a,b}(x) = 0$, ou encore $b(\mathrm{Ln}(x))^{b-1} + a = 0$.

1er cas : si b est impair, b-1 est pair et donc $b(\mathrm{Ln}(x))^{b-1} + a$ est > 0.
La dérivée $f'_{a,b}(x)$ est donc négative, et $f_{a,b}$ est décroissante.

2ème cas : si b est pair, b-1 est impair, et la dérivée s'annule pour $(\mathrm{Ln}(x))^{b-1} = -a/b$,
soit en $x^* = e^{-(a/b)^{(\frac{1}{b-1})}}$
$f'_{a,b}(x)$ est positive pour x < x* et négative pour x > x*, et $f_{a,b}$ est croissante jusqu'en x* puis décroissante ensuite.

25) Toujours en faisant le changement u = Ln(x), quand x → 0, $f_{a,b}(x)$ → 0.
Quand x → +∞, $f_{a,b}(x)$ → 0.

26) Pour x=1, y = $f_{a,b}(1)$ =1.
Le point F(1, 1) est donc un point fixe pour toutes les courbes C(a, b).

La tangente en F à C(a, b) a pour équation :
$(y – 1)/(x – 1) = f'_{a,b}(1) = - a$
Soit : $y = - ax + a + 1$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ de la COMPOSITION D'Économie *(sujet1 & sujet2)*

.

Sujet 1

"Comment l'Afrique peut-elle réduire sa dépendance économique face aux défis climatiques pour construire une croissance résiliente et durable ?"

Correction : Proposition de plan détaillé

Introduction :

- **Accroche :** Mention des défis économiques et environnementaux majeurs en Afrique (exemple : dépendance aux exportations de matières premières et vulnérabilité aux changements climatiques).
- **Contexte :** Les économies africaines subissent les fluctuations des marchés mondiaux tout en étant parmi les plus exposées aux effets des changements climatiques.
- **Problématique :** Comment les pays africains peuvent-ils construire une économie autonome et durable face à ces enjeux ?
- **Annonce du plan :** Analyse des causes de la dépendance économique, des défis climatiques aggravants, et des solutions pour construire une croissance durable.

Partie I : Une double dépendance : économique et climatique

1. **Dépendance économique :**
   - Dépendance historique aux exportations de matières premières (exemple : pétrole, minerais, cacao).

- Faible diversification des économies, rendant les pays vulnérables aux fluctuations des prix mondiaux.

2. **Défis climatiques aggravant la dépendance :**
   - Impact des catastrophes climatiques sur les secteurs clés comme l'agriculture (sécheresses, inondations).
   - Réduction de la productivité économique et augmentation des besoins d'importation.

Partie II : Construire une croissance résiliente et durable : des opportunités à saisir

1. **Diversification économique :**
   - Valoriser les ressources locales au-delà des matières premières : transformation industrielle, production locale.
   - Développer des secteurs d'avenir comme les énergies renouvelables et le tourisme durable.
2. **Transition climatique comme opportunité :**
   - Rôle des énergies vertes (exemple : fermes solaires au Maroc, géothermie au Kenya).
   - Agroécologie et pratiques agricoles durables pour renforcer la sécurité alimentaire.

Partie III : Les conditions nécessaires à une croissance durable

1. **Investir dans les infrastructures et les compétences :**
   - Développer les infrastructures énergétiques et numériques pour stimuler les économies locales.
   - Former la population aux métiers verts et aux compétences nécessaires pour une transition écologique.
2. **Renforcer l'intégration régionale et les coopérations Sud-Sud :**
   - Exemple de la ZLECAF pour créer des chaînes de valeur intra-africaines.
   - Coopération entre pays africains pour mutualiser les ressources et les solutions technologiques.
3. **Mobiliser les financements climatiques :**
   - Utiliser les fonds climatiques internationaux pour soutenir des projets durables et autonomes.

Conclusion :

- **Synthèse :** Résumer les défis liés à la double dépendance économique et climatique et les solutions proposées.
- **Ouverture :** Insister sur la nécessité d'une gouvernance africaine unifiée pour réussir cette transition vers une économie résiliente et durable.

Guide de notation

Critères principaux :

1. **Compréhension de la problématique (4 points)**
   - Reformulation claire de la problématique et pertinence des enjeux identifiés.
2. **Structure et argumentation (6 points)**
   - Plan bien articulé (introduction, développement en 2 ou 3 parties, conclusion).
   - Arguments cohérents et progression logique dans la réflexion.
3. **Mobilisation du programme (6 points)**
   - Utilisation des concepts liés à la dépendance économique, à la diversification, et aux politiques climatiques.
   - Illustration avec des exemples africains concrets (pays ou initiatives).
4. **Qualité de l'analyse (4 points)**
   - Capacité à équilibrer les aspects économiques et climatiques.
   - Propositions réalistes et adaptées au contexte africain.
5. **Qualité de la rédaction (4 points)**
   - Langage clair et structuré, absence de fautes majeures.
   - Bonne maîtrise des termes économiques et climatiques.

Répartition des points :

- **Introduction : 4 points**
  - Accroche (1 point), contextualisation (1 point), problématique (1 point), annonce du plan (1 point).
- **Développement : 10 points**
  - Partie I : 3 points.
  - Partie II : 4 points.

    - Partie III : 3 points.
- **Conclusion : 3 points**
    - Synthèse (2 points), ouverture (1 point).
- **Références et exemples : 3 points**
    - Qualité et pertinence des exemples pour illustrer les arguments.

Total : **20 points**

<u>**Sujet 2**</u>

"L'intelligence artificielle en Afrique : moteur de développement économique ou facteur d'aggravation des inégalités ?"

Correction : Proposition de plan détaillé

Introduction :

- Accroche : Chiffres récents sur l'adoption de l'IA en Afrique ou sur son impact économique mondial.
- Contexte : L'IA est perçue comme une révolution technologique majeure qui transforme les économies. En Afrique, elle pourrait être un levier puissant pour le développement, mais elle soulève également des questions d'équité et d'inclusion.
- Problématique : Comment l'intelligence artificielle peut-elle contribuer au développement économique de l'Afrique tout en évitant d'aggraver les inégalités ?
- Annonce du plan : Analyse des opportunités offertes par l'IA, des risques qu'elle représente et des moyens de maximiser ses bénéfices tout en limitant ses effets négatifs.

Partie I : L'intelligence artificielle, un levier pour le développement économique en Afrique

1. Amélioration de la productivité dans les secteurs clés :

- Agriculture : prédiction météorologique, gestion des ressources, lutte contre les ravageurs (exemple : plateforme de prévision agricole au Kenya).
- Santé : diagnostic à distance, optimisation des services de santé (exemple : Babyl au Rwanda).
- Éducation : apprentissage en ligne adapté grâce à l'IA.

2. Attractivité des investissements étrangers :

- L'IA comme secteur émergent pour les start-ups africaines (exemple : Nigeria, Afrique du Sud).
- Développement de hubs technologiques (Nairobi, Accra).

3. Optimisation des politiques publiques :

- Identification des bénéficiaires des aides sociales, réduction des fraudes, urbanisme intelligent.

Partie II : L'intelligence artificielle, un facteur d'aggravation des inégalités

1. Fracture numérique :
    - Inégalités d'accès aux infrastructures technologiques entre les zones rurales et urbaines.
    - Coût élevé de l'accès à l'IA pour les pays à faible revenu.
2. Menaces pour l'emploi :

- Automatisation des tâches peu qualifiées : impact sur les secteurs industriels et agricoles.
- Absence de reconversion professionnelle adaptée (écart entre compétences disponibles et compétences nécessaires).

3. Concentration des bénéfices :

- Risque de captation des profits par des multinationales étrangères.
- Dépendance accrue vis-à-vis des géants technologiques (USA, Chine).

Partie III : Maximiser les bénéfices de l'IA tout en limitant les risques

1. Investissements dans les infrastructures et la formation :

- Développer l'éducation technologique et les compétences en IA.
- Stimuler la recherche locale pour une IA adaptée aux besoins africains.

2. Favoriser une régulation inclusive :

- Réglementer l'utilisation des données pour garantir l'équité et la confidentialité.
- Stimuler l'adoption de solutions IA open source accessibles aux petites entreprises.

3. Encourager les partenariats intra-africains :

- Coopération régionale pour mutualiser les ressources technologiques.
- Mise en œuvre de projets communs dans le cadre de la ZLECAF.

Conclusion :

- Synthèse : Résumer les principaux arguments en faveur du rôle de l'IA comme moteur de développement tout en soulignant les risques d'inégalités.
- Ouverture : L'importance d'un modèle africain d'IA adapté aux réalités locales pour un développement inclusif et durable.

Guide de notation

Critères principaux :

1. **Compréhension de la problématique (4 points)**
   - Capacité à identifier clairement les enjeux du sujet.
   - Reformulation pertinente de la problématique dans l'introduction.
2. **Structure et argumentation (6 points)**
   - Plan bien structuré (introduction, développement en 2 ou 3 parties, conclusion).
   - Cohérence des idées et fluidité dans l'enchaînement des arguments.
3. **Mobilisation du programme (6 points)**
   - Référence aux concepts économiques liés au développement, à la croissance, et aux inégalités.
   - Usage pertinent d'exemples africains pour illustrer les arguments.
4. **Qualité de l'analyse (4 points)**
   - Analyse équilibrée entre les opportunités et les risques.
   - Proposition de solutions réalistes dans la dernière partie.
5. **Qualité de la rédaction (4 points)**
   - Clarté et précision du langage.
   - Bonne utilisation des termes économiques et absence de fautes majeures.

Répartition des points :

- **Introduction : 4 points**
  - Accroche (1 point), contextualisation (1 point), problématique (1 point), annonce du plan (1 point).
- **Développement : 10 points**
  - Partie I : 5 points.
  - Partie II : 5 points.
- **Conclusion : 3 points**
  - Synthèse (2 points), ouverture (1 point).
- **Références et exemples : 3 points**
  - Qualité et pertinence des exemples, capacité à illustrer les arguments.

Total : **20 points**

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est constituée de cinq exercices indépendants à traiter dans un ordre quelconque. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Exercice 1 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On s'intéresse ici à la convergence et à la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{dt}$.

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et préciser la valeur $f(0)$ donnant ce prolongement.
   Comme au voisinage de 0 on $\sin(x) \sim x$, la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$ est égale à 1. La fonction f se prolonge donc par continuité en 0 par $f(0) = 1$.

2. On note pour tout $X > \frac{\pi}{2}$:
$$I_X = \int_{\pi/2}^{X} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{dt}$$
   Montrer l'égalité :
$$I_X = -\frac{\cos(X)}{X} - \int_{\pi/2}^{X} \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{dt}$$
   et en déduire la convergence de l'intégrale
$$\int_{\pi/2}^{+\infty} f(t)\mathrm{dt}.$$
   On admet que l'on peut montrer de même que $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{dt}$ converge.

On effectue une intégration par parties, on obtient :

$$I_X = \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_{\pi/2}^{X} - \int_{\pi/2}^{X} \frac{\cos(t)}{t^2} \mathrm{dt}$$

$$= -\frac{\cos(X)}{X} - \int_{\pi/2}^{X} \frac{\cos(t)}{t^2} \mathrm{dt}$$

Comme la fonction cos est bornée par 1, la limite de $\frac{\cos(X)}{X}$ en $+\infty$ est nulle. De plus on a $\left| \frac{\cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{1}{t^2} \mathrm{dt}$ est convergente, donc par théorème de comparaison l'intégrale $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} \mathrm{dt}$ est absolument convergente, donc convergente. On en déduit que I_X admet une limite finie quand X tend vers $+\infty$, ce qui veut dire que l'intégrale $\int_{\pi/2}^{+\infty} f(t) \mathrm{dt}$ converge.

3. Montrer que l'intégrale $\int_{\pi/2}^{+\infty} |f(t)| \mathrm{dt}$ diverge.
   Soit $t \geq \pi/2$. Comme $|\sin(t)| \leq 1$ on a :

$$|f(t)| \geq \frac{\sin^2(t)}{t} \geq \frac{1 - \cos(2t)}{2t}$$

   Or l'intégrale $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} \mathrm{dt}$ converge d'après ce qui a été admis précédemment. Comme l'intégrale $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{1}{t} \mathrm{dt}$ est une intégrale de Riemann divergente, on en déduit que $\int_{\pi/2}^{+\infty} |f(t)| \mathrm{dt}$ diverge.

Exercice 2 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n^2 - 1$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n le terme u_n est entier et vérifie $u_n \in [2, +\infty[$.
   On procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$, on a bien u_n entier et appartenant à $[2, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que u_n est entier supérieur ou égal à 2. On a alors $u_n^2 - 1$ clairement entier et comme $u_n \geq 2$, on a $u_n^2 \geq 4 \Leftrightarrow u_n^2 - 1 \geq 3$ donc $u_{n+1} \geq 2$. Par principe de récurrence, on a bien montré le résultat pour tout entier naturel n.

2. Soit n un entier naturel, exprimer u_{n+2} en fonction de u_n.
   On a

$$u_{n+2} = u_{n+1}^2 - 1 = (u_n^2 - 1)^2 - 1 = u_n^4 - 2u_n^2$$

3. Soit p un entier naturel non nul strictement supérieur à 1. On note $v_p(n)$ la plus grande puissance entière de p qui divise u_n. Ainsi $v_2(2) = 3$ car 2^3 divise $u_2 = 8$ mais pas 2^4.

(a) Montrer que pour tout entier naturel n, u_{2n} est pair et u_{2n+1} est multiple de 3.

On procède à nouveau par récurrence sur n. On a $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$, donc la propriété est bien vraie pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie pour n. Alors $u_{2n+2} = u_{2n}^4 - 2u_{2n}^2 = u_{2n}^2(u_{2n} - 2)$. Or u_{2n} est pair, donc u_{2n+2} également. De même, $u_{2n+3} = u_{2n+1}^4 - 2u_{2n+1}^2 = u_{2n+1}^2(u_{2n+1} - 2)$ et comme u_{2n+1} est divisible par 3, u_{2n+3} l'est également. Par principe de récurrence, on a bien montré le résultat pour tout entier naturel n.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n on a $v_2(2n + 2) = 2v_2(2n) + 1$.

Soit n un entier naturel. On note $\alpha = v_2(2n)$. Remarquons que l'on a $\alpha > 1$ d'après la question précédente. On a $u_{2n} = 2^\alpha.m$ avec m un entier impair. D'où :

$$u_{2n+2} = u_{2n}^2(u_{2n}^2 - 2) = 2^{2\alpha}.m^2(2^{2\alpha}.m^2 - 2) = 2^{2\alpha+1}.m^2(2^{2\alpha-1}.m^2 - 1).$$

Comme $m^2(2^{2\alpha-1}.m^2 - 1)$ est impair, on obtient bien $v_2(2n + 2) = 2v_2(2n) + 1$.

(c) Déterminer une relation similaire entre $v_3(2n + 3)$ et $v_3(2n + 1)$.

On procède de même en notant $\beta = v_3(2n+1)$. Alors $u_{2n+1} = 3^\beta.m$ avec m non divisible par 3. On écrit :

$$u_{2n+3} = u_{2n+1}^2(u_{2n+1}^2 - 2) = 3^{2\beta}.m^2(3^{2\beta}.m^2 - 2)$$

Comme 2 n'est pas un multiple de 3, $m^2(3^{2\beta}.m^2 - 2)$ n'est pas un multiple de 3. On en déduit que

$$v_3(2n + 3) = 2v_3(2n + 1).$$

4. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$\frac{1}{u_{2n}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \text{ et } \frac{1}{u_{2n+1}} \leq \frac{1}{3^{n+1}}$$

Par récurrence immédiate, on a $v_2(2n) \geq 2^n v_2(0)$, donc $\frac{1}{u_{2n}} \leq \frac{1}{2^{2^n}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ car $v_2(0) = 1$. De même, $v_3(2n + 1) = 2^n v_3(1) = 2^n$ donc $u_{2n+1} \geq 3^{n+1}$ et on obtient la deuxième inégalité.

5. À l'aide de la question précédente et en distinguant les cas k pair et k impair, montrer que la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$ est bornée par $\frac{3}{2}$ et converge.

Si $n = 2p + 1$ est impair, en distinguant les cas où k est pair ($k = 2i$) et k est impair ($k = 2i + 1$), on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{2p+1} \frac{1}{u_k} = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{u_{2i}} + \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{u_{2i+1}}.$$

D'après la question précédente, on a donc

$$\sum_{k=0}^{2p+1} \frac{1}{u_k} \leq \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{2^{i+1}} + \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{3^{i+1}},$$

qui est croissant en p et a pour limite $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.
Si $n=2p$ est pair, on peut revenir au cas précédent car $u_k>0$ pour tout k :

$$\sum_{k=0}^{2p}\frac{1}{u_k}\leq\sum_{k=0}^{2p+1}\frac{1}{u_k}\leq\frac{3}{2}.$$

Ainsi la suite $(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par $\frac{3}{2}$, elle est donc convergente.

Exercice 3 :

On considère trois dés à six faces équilibrés. On les lance simultanément, et on note D_1, D_2 et D_3 les variables aléatoires indépendantes égales au résultat de chacun des dés. On note X la valeur minimale de D_1, D_2 et D_3 et Y leur valeur maximale. Ainsi, si on a lancé les trois dés et obtenu 2, 3 et 5, on a $X=2$ et $Y=5$.

1. Rappeler la loi suivie par chacune des variables D_1, D_2 et D_3. Rappeler également son espérance.
   Chacune de ces variables suit la loi uniforme sur $\{1,2,3,4,5,6\}$. On a donc $P(D_i=k)=1/6$ pour tout $k\in\{1,2,3,4,5,6\}$. L'espérance est $\frac{6(6+1)}{12}=\frac{7}{2}$.

2. Déterminer $n\in\mathbb{N}$ tel que la variable aléatoire $\Delta_1=n-D_1$ suive la même loi que D_1.
   Pour que cette variable ait la même loi que D_1, il faut Δ_1 ait le même ensemble de valeurs $\Delta_1(\Omega)$ que D_1. Elle doit donc prendre valeurs entières de 1 à 6. Comme D_1 prend ces mêmes valeurs, cela impose $n=7$. On a alors pour tout $k\in\{1,2,3,4,5,6\}$:

   $$P(\Delta_1=k)=P(7-D_1=k)=P(D_1=7-k)=1/6$$

   et Δ_1 suit donc bien la même loi que D_1.

3. Justifier que $\Delta_2=n-D_2$ et $\Delta_3=n-D_3$ suivent également la même loi que D_2 et D_3.
   D_2 suit la même loi que D_1, donc $\Delta_2=n-D_2$ suit la même loi que $\Delta_1=n-D_1$, c'est à dire celle de D_1 d'après la question précédente, qui est celle de D_2. De même D_3 suit la même loi que D_1 et on aboutit à la même conclusion : Δ_3 suit la même loi que D_3.

4. Soit $k\in\{1,2,3,4,5,6\}$.
   (a) Calculer $P(Y\leq k)$.
   On a $(Y\leq k)=(D_1\leq k)\cap(D_2\leq k)\cap(D_3\leq k)$ et comme les variables aléatoires D_1, D_2 et D_3 sont indépendantes, on a :

   $$P(Y\leq k)=P(D_1\leq k)\times P(D_2\leq k)\times P(D_3\leq k)$$
   $$=\left(\frac{k}{6}\right)^3=\frac{k^3}{216}$$

(b) En déduire $P(Y = k)$.

On peut écrire $(Y = k) \cup (Y \leq k-1) = (Y \leq k)$, et cette union est disjointe. On en déduit

$$P(Y = k) + P(Y \leq k-1) = P(Y \leq k).$$

Avec la question précédente, cela donne :

$$P(Y = k) = \frac{k^3 - (k-1)^3}{216} = \frac{3k^2 - 3k + 1}{216}$$

(c) En admettant que Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont indépendantes (au même titre que D_1, D_2 et D_3), montrer que $P(X = 7-k) = P(Y = k)$.

On peut écrire comme auparavant :

$$P(X = 7-k) = P(X \geq 7-k) - P(X \geq 8-k)$$

$$= P(D_1 \geq 7-k) \times P(D_2 \geq 7-k) \times P(D_3 \geq 7-k) - P(D_1 \geq 8-k) \times P(D_2 \geq 8-k) \times P(D_3 \geq 8-k)$$

$$= P(7-D_1 \leq k) \times P(7-D_2 \leq k) \times P(D_3 \leq k) - P(7-D_1 \leq k-1) \times P(7-D_2 \leq k-1) \times P(7-D_3 \leq k-1)$$

$$= P(\Delta_1 \leq k) \times P(\Delta_2 \leq k) \times P(\Delta_3 \leq k) - P(\Delta_1 \leq k-1) \times P(\Delta_2 \leq k-1) \times P(\Delta_3 \leq k-1)$$

Et si on note M le maximum de Δ_1, Δ_2 et Δ_3, alors on obtient comme précédemment :

$$P(M = k) = P(\Delta_1 \leq k) \times P(\Delta_2 \leq k) \times P(\Delta_3 \leq k) - P(\Delta_1 \leq k-1) \times P(\Delta_2 \leq k-1) \times P(\Delta_3 \leq k-1)$$

Les variables Δ_1, Δ_2 et Δ_3 étant indépendantes et de même loi que D_1, D_2 et D_3, leur maximum a la même loi que Y, donc on a bien montré l'égalité demandée.

5. Calculer l'espérance de Y puis de X.

Avec la formule usuelle pour l'espérance,

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{6} kP(Y = k) = \frac{1}{216} \sum_{k=1}^{6} 3k^3 - 3k^2 + k$$

$$= \frac{1}{216} \left(3\frac{6^2.7^2}{4} - 3\frac{6.7.13}{6} + \frac{6.7}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{216}(27.49 - 21.13 + 21) = \frac{1}{72}(9.49 - 7(13-1))$$

$$= \frac{1}{72}(441 - 84) = \frac{357}{72}$$

On en déduit :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{6} kP(Y = 7-k)$$

$$= 7\sum_{k=1}^{6} P(Y = 7-k) - \sum_{k=1}^{6} (7-k)P(Y = 7-k)$$

$$= 7 - E(Y) = \frac{147}{72}$$

Exercice 4 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On se propose de répondre à la question suivante : existe-t-il des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x on ait $f(f(x)) = \alpha.x$? On dira qu'une telle fonction possède la propriété $\mathcal{P}$.

1. On suppose ici α non nul. Soit f une fonction possédant la propriété $\mathcal{P}$. Montrer que si deux réels x et x' on la même image par f alors ils sont égaux.

   Comme $f(x) = f(x')$, on a $f(f(x) = f(f(x'))$ donc $\alpha.x = \alpha.x'$ et comme α est non nul, $x = x'$.

2. À l'aide de l'étude de la monotonie de f, démontrer par l'absurde que si $\alpha < 0$, alors il n'existe pas de fonction ayant la propriété $\mathcal{P}$.

   On a montré à la question précédente que f était injective si α était non nul. Comme elle est de plus continue, elle est strictement monotone. Qu'elle soit strictement croissante ou strictement décroissante, $f \circ f$ est alors strictement croissante. Par conséquent, on ne peut avoir $f \circ f(x) = \alpha x$ car la fonction $x \mapsto \alpha x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Il n'existe donc pas de telle fonction si $\alpha < 0$.

3. Montrer qu'il existe une fonction ayant la propriété $\mathcal{P}$ dans le cas $\alpha \geq 0$.

   Dans ce cas, la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\alpha}.x$ est une solution évidente.

Exercice 5 :

Soit a un réel quelconque. On considère la matrice $A_a = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A_a est diagonalisable sans calcul.

   Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable.

2. Montrer que 2 est une valeur propre de A_a et déterminer la dimension de l'espace propre associé en fonction de a.

   On note I_3 la matrice identité d'ordre 3. La matrice $B_a = A_a - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & a & -1 \\ a & -1 & a \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car sa première et sa troisième ligne sont identiques. Donc 2 est bien une valeur propre de A_a. Son espace propre est de dimension 2 si et seulement si la matrice B_a est de rang 1. Pour cela la deuxième ligne doit être un multiple de la troisième, ce qui est le cas si et seulement si $-1 = a^2$. En conclusion, la dimension de l'espace propre pour 2 est égale à 1 si a est différent de 1 et de -1 et est égale à 2 sinon.

3. Calculer A_a^2.

   On a $A_a^2 = \begin{pmatrix} a^2+2 & a & a^2-2 \\ a & 2a^2+1 & a \\ a^2-2 & a & a^2+2 \end{pmatrix}$.

4. On suppose dans cette question $a \neq -1$ et $a \neq 1$. On note λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de A_a distinctes de 2.

   (a) Montrer que l'on a :
   $$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 1 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 & = & 4a^2 + 1 \end{cases}$$
   On sait que A_a est diagonalisable, donc semblable à
   $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$
   La trace de deux matrices semblables étant égale, la trace de A est égale à $2+\lambda_1+\lambda_2$. De même la trace de A_a^2 est égale à $4+\lambda_1^2+\lambda_2^2$. Cela donne les deux équations du système.

   (b) En déduire le produit $\lambda_1.\lambda_2$ en fonction de a.
   En élevant la première ligne du système au carré, on a :
   $$\lambda_1^2 + 2\lambda_1.\lambda_2 + \lambda_2^2 = 1$$
   et en retranchant à cette équation la deuxième ligne du système on en déduit :
   $$2\lambda_1.\lambda_2 = -4a^2$$
   et
   $$\lambda_1.\lambda_2 = -2a^2$$

   (c) Déterminer λ_1 et λ_2 en fonction de a.
   On connaît la somme et le produit de λ_1 et λ_2. Or ce sont les racines du polynôme :
   $$X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1.\lambda_2$$
   que l'on réécrit :
   $$X^2 - X - 2a^2$$
   Le discriminant de ce polynôme est $1 + 8a^2$, donc les valeurs de λ_1 et λ_2 sont
   $$\frac{1+\sqrt{1+8a^2}}{2} \text{ et } \frac{1-\sqrt{1+8a^2}}{2}.$$