ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

L'autorité est-elle une dimension nécessaire de l'éducation ?

Sujet n° 2

La ville est-elle pour vous un milieu favorable à l'épanouissement des hommes ?

Sujet n° 3

L'art a-t-il le pouvoir de changer les choses ? *(que ce soit en bien ou en mal)*

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve est composée d'un exercice et d'un problème, indépendants, à traiter dans un ordre quelconque. Le problème comporte cinq parties qu'il est recommandé d'aborder dans l'ordre proposé.

Exercice 1 :
On considère la somme S(n) = $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$, où n est un nombre entier supérieur ou égal à 1.
1) Calculer S(1), S(2), S(3), S(4).
Que remarquez-vous à partir de ces résultats ?

2) Trouver la valeur de S(n) en fonction de n.
Indication : on pourra soit passer par un calcul direct, soit procéder par récurrence.

Problème :
Les symboles e et Ln désignent respectivement l'exponentielle (e = 2,718) et le logarithme népérien.
On donne la valeur de l'intégrale G = $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$: G = $\sqrt{\pi}$.
Les paramètres a et b sont des entiers naturels positifs ou nuls ; on considère la famille de fonctions $f_{a,b}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$x \rightarrow f_{a,b}(x) = \frac{e^{-(\mathrm{Ln}\,x)^b}}{x^a} = \frac{\exp[-(\mathrm{Ln}\,x)^b]}{x^a}$$

Partie 1 :
Dans cette première partie, on prend b = 0. La fonction est notée $f_{a,0}$.
1) On désire étudier précisément les variations de la fonction $f_{a,0}$.

Selon les valeurs de a, calculer les dérivées première et seconde, $f'_{a,0}$ et $f''_{a,0}$ de $f_{a,0}$. Quel est leur signe ?
2) Donner les limites de $f_{a,0}$(x) quand x → 0 et quand x → +∞.
3) Etablir le tableau de variations de $f_{a,0}$. Donner la forme du graphe C(a,0) de $f_{a,0}$.
4) Soient a et a' deux entiers de $\mathbb{N}$, avec $a' > a$.
Comparer les positions respectives des graphes C(a,0) et C(a',0) des fonctions $f_{a,0}$ et $f_{a',0}$.
5) Donner, selon les valeurs de a, une primitive de $f_{a,0}$.
6) Dans cette question, on prend b = 1. Montrer que $f_{a,1}$ peut s'écrire sous la forme k.$f_{a',0}$ pour laquelle on précisera la valeur de a' en fonction de a et la valeur de k.

Partie 2

Dans cette deuxième partie, on prend a = 0 et b = 2 ; la fonction est notée $f_{0,2}$.
7) Calculer la dérivée première de $f_{0,2}$; étudier les solutions de l'équation $f'_{0,2}$(x) = 0 et en déduire le signe de $f'_{0,2}$.
8) Calculer la dérivée seconde de $f_{0,2}$; étudier les solutions de l'équation $f''_{0,2}$(x) = 0 et en déduire le signe de $f''_{0,2}$.
9) Donner les limites de $f_{0,2}$(x) quand x → 0 et quand x → +∞.
10) Calculer la limite de $f'_{0,2}$(x) quand x tend vers 0.
11) Montrer que $f_{0,2}$ passe par un maximum M dont on donnera les coordonnées x(M) et y(M).
Ecrire le tableau de variations de $f_{0,2}$ et donner la forme de son graphe C(0,2).
12) Calculer les intégrales A = $\int_0^{+\infty} f_{0,2}(x)\,dx$ et B = $\int_0^{+\infty} x f_{0,2}(x)dx$.

Partie 3

Dans cette troisième partie, on prend a = 1 et b = 2 ; la fonction sera notée $f_{1,2}$.
13) Calculer les dérivées première et seconde de $f_{1,2}$; étudier les solutions des équations $f'_{1,2}$(x) = 0 et $f''_{1,2}$(x) = 0.
En déduire le signe de $f'_{1,2}$ et $f''_{1,2}$.
14) Donner les limites de $f_{1,2}$(x) quand x → 0 et quand x → +∞.
15) Montrer que $f_{1,2}$ passe par un maximum N dont on donnera les coordonnées x(N) et y(N).
16) En déduire le tableau de variations de $f_{1,2}$ et la forme de son graphe C(1,2).
17) Calculer l'intégrale C = $\int_0^{+\infty} f_{1,2}(x)\,dx$.

Partie 4

Dans cette quatrième partie, on prend b = 2 ; la fonction sera notée $f_{a,2}$.
18) Calculer les dérivées première et seconde de $f_{a,2}$; quelles sont les solutions des équations $f'_{a,2}$(x) = 0 et $f''_{a,2}$(x) = 0 ?
Donner le signe de $f'_{a,2}$ et $f''_{a,2}$.
19) Donner les limites de $f_{a,2}$(x) quand x → 0 et quand x → +∞.
20) Montrer que $f_{a,2}$ passe par un maximum P dont on donnera les coordonnées x(P) et y(P).
21) Déterminer l'équation du lieu géométrique de P.

22) Donner le tableau de variations de $f_{a,2}$ et la forme de son graphe C(a,2).

23) Calculer l'intégrale D = $\int_0^{+\infty} f_{a,2}$(x) dx.

Partie 5

Cette cinquième partie aborde le cas général $f_{a,b}$.

24) Calculer la dérivée première de $f_{a,b}$.

Etudier, selon les valeurs de b, l'existence de solutions de l'équation $f'_{a,b}$(x)=0.

Quel est le signe de $f'_{a,b}$?

25) Donner les limites de $f_{a,b}$(x) quand x → 0 et quand x → +∞.

26) Montrer que toutes les courbes C(a, b) passent par un point fixe F dont on précisera les coordonnées.

Donner l'équation de la tangente en F à C(a, b).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet 1

L'intelligence artificielle en Afrique : moteur de développement économique ou facteur d'aggravation des inégalités ?

Sujet 2

Comment l'Afrique peut-elle réduire sa dépendance économique face aux défis climatiques pour construire une croissance résiliente et durable ?

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

$2^{\text{ème}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est constituée de cinq exercices indépendants à traiter dans un ordre quelconque. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Exercice 1 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On s'intéresse ici à la convergence et à la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{dt}$.

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et préciser la valeur $f(0)$ donnant ce prolongement.

2. On note pour tout $X > \frac{\pi}{2}$:
$$I_X = \int_{\pi/2}^{X} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{dt}$$
Montrer l'égalité :
$$I_X = -\frac{\cos(X)}{X} - \int_{\pi/2}^{X} \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{dt}$$
et en déduire la convergence de l'intégrale
$$\int_{\pi/2}^{+\infty} f(t)\mathrm{dt}.$$
On admet que l'on peut montrer de même que $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{dt}$ converge.

3. Montrer que l'intégrale $\int_{\pi/2}^{+\infty} |f(t)|\mathrm{dt}$ diverge.

Exercice 2 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n^2 - 1$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n le terme u_n est entier et vérifie $u_n \in [2, +\infty[$.

2. Soit n un entier naturel, exprimer u_{n+2} en fonction de u_n.

3. Soit p un entier naturel non nul strictement supérieur à 1. On note $v_p(n)$ la plus grande puissance entière de p qui divise u_n. Ainsi $v_2(2) = 3$ car 2^3 divise $u_2 = 8$ mais pas 2^4.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, u_{2n} est pair et u_{2n+1} est multiple de 3.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n on a $v_2(2n+2) = 2v_2(2n) + 1$.

   (c) Déterminer une relation similaire entre $v_3(2n+3)$ et $v_3(2n+1)$.

4. Montrer que pour tout entier naturel n on a :
$$\frac{1}{u_{2n}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \text{ et } \frac{1}{u_{2n+1}} \leq \frac{1}{3^{n+1}}$$

5. À l'aide de la question précédente et en distinguant les cas k pair et k impair, montrer que la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$ est bornée par $\frac{3}{2}$ et converge.

Exercice 3 :

On considère trois dés à six faces équilibrés. On les lance simultanément, et on note D_1, D_2 et D_3 les variables aléatoires indépendantes égales au résultat de chacun des dés. On note X la valeur minimale de D_1, D_2 et D_3 et Y leur valeur maximale. Ainsi, si on a lancé les trois dés et obtenu 2, 3 et 5, on a $X = 2$ et $Y = 5$.

1. Rappeler la loi suivie par chacune des variables D_1, D_2 et D_3. Rappeler également son espérance.

2. Déterminer $n \in \mathbb{N}$ tel que la variable aléatoire $\Delta_1 = n - D_1$ suive la même loi que D_1.

3. Justifier que $\Delta_2 = n - D_2$ et $\Delta_3 = n - D_3$ suivent également la même loi que D_2 et D_3.

4. Soit $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
   (a) Calculer $P(Y \leq k)$.

   (b) En déduire $P(Y = k)$.

   (c) En admettant que Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont indépendantes (au même titre que D_1, D_2 et D_3), montrer que $P(X = 7 - k) = P(Y = k)$.

5. Calculer l'espérance de Y puis de X.

Exercice 4 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On se propose de répondre à la question suivante : existe-t-il des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x on ait $f(f(x)) = \alpha.x$? On dira qu'une telle fonction possède la propriété $\mathcal{P}$.

1. On suppose ici α non nul. Soit f une fonction possédant la propriété $\mathcal{P}$. Montrer que si deux réels x et x' on la même image par f alors ils sont égaux.

2. À l'aide de l'étude de la monotonie de f, démontrer par l'absurde que si $\alpha < 0$, alors il n'existe pas de fonction ayant la propriété $\mathcal{P}$.

3. Montrer qu'il existe une fonction ayant la propriété $\mathcal{P}$ dans le cas $\alpha \geq 0$.

Exercice 5 :

Soit a un réel quelconque. On considère la matrice $A_a = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A_a est diagonalisable sans calcul.

2. Montrer que 2 est une valeur propre de A_a et déterminer la dimension de l'espace propre associé en fonction de a.

3. Calculer A_a^2.

4. On suppose dans cette question $a \neq -1$ et $a \neq 1$. On note λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de A_a distinctes de 2.

   (a) Montrer que l'on a :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 1 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 & = & 4a^2 + 1 \end{array} \right.$$

   (b) En déduire le produit $\lambda_1.\lambda_2$ en fonction de a.

   (c) Déterminer λ_1 et λ_2 en fonction de a.