ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ de la $1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation. Tous les résultats seront encadrés.

1 Problème d'analyse

Dans ce problème, nous nous intéressons à l'étude de certaines propriétés de la fonction zêta de Riemann définie par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Partie I : Graphe de la fonction ζ

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction ζ.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. La série de Riemman $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$.

   Par conséquent, le domaine de définition de ζ est $D =]1, +\infty[$.

2. Démontrer que ζ est continue sur D.

   Pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n : x \in D \mapsto \frac{1}{n^x} = \exp(-x\ln(n))$ est continue sur $]1, +\infty[$.

   Soit $a > 1$. On a pour tout $x \in [a, +\infty[$, $\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$ et la série de Riemann de terme général $\left(\frac{1}{n^a}\right)_{n\geq 1}$ converge. On en déduit donc que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.
   Par suite, ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

3. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Tout d'abord, on a $\dfrac{1}{1^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et pour tout $n \geq 2$, $\dfrac{1}{n^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Soit $a > 1$. D'après la question précédente, la série de fonctions définissant ζ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. On en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 1.$$

4. a) Démontrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition D et donner l'expression de ses dérivées sous forme de séries.

Tout d'abord, pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n : x \in D \mapsto \dfrac{1}{n^x} = \exp(-x\ln(n))$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et pour tout $k \geq 1$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-\ln(n))^k}{n^x}$.

Soit $a > 1$. On a pour tout $x \in [a, +\infty[$, $\left|f_n^{(k)}(x)\right| \leq \dfrac{\ln(n)^k}{n^a}$. Or,

$$n^{\frac{a+1}{2}} \frac{\ln(n)^k}{n^a} = \frac{\ln(n)^k}{n^{\frac{a-1}{2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par croissances comparées. La série de Riemann de terme général $\left(\dfrac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}\right)_{n\geq 1}$ converge car $\dfrac{a+1}{2} > 1$, on en déduit donc que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.
Par suite, ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et pour tout $k \geq 1$ et $x \in]1, +\infty[$,

$$\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}.$$

b) En déduire les variations de la fonction ζ ainsi que sa convexité.

D'après la question précédente, on a pour tout $x > 1$, $\zeta'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^x} < 0$ donc ζ est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

De plus, on a pour tout $x > 1$, $\zeta''(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(n)^2}{n^x} > 0$ donc ζ est convexe sur $]1, +\infty[$.

5. a) Soit $n \geq 1$ et $x \in D$. Montrer que : $\dfrac{1}{(n+1)^x} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n^x}$.

La fonction $t \in [1, +\infty[\mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante donc on a pour tout $t \in [n, n+1]$,

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}.$$

Par croissance de l'intégrale on en déduit $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^x}\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x}\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire : $\displaystyle\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n^x}$.

b) En déduire un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque $x \to 1^+$.

On fixe $x > 1$. Soit $N \geq 1$. Sommons les inégalités obtenues précédemment de 1 à N :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^x} \leq \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}.$$

Par changement d'indice sur le terme de gauche et par relation de Chasles sur le terme central, on obtient :

$$\sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^x} \leq \int_1^{N+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \qquad (\star)$$

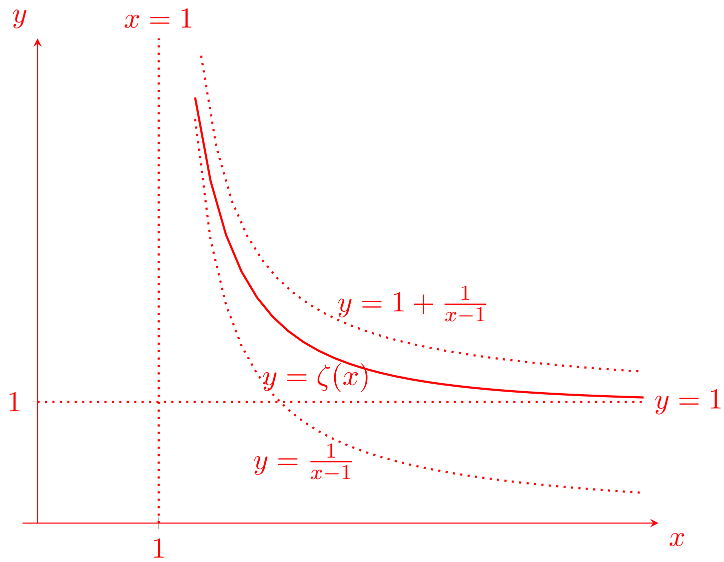
D'une part, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \zeta(x)$. Ensuite, $\displaystyle\sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n^x} - 1 \xrightarrow[N\to+\infty]{} \zeta(x) - 1$. Enfin,

$$\int_1^{N+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^{N+1} = \frac{(N+1)^{1-x}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$$

car $1 - x < 0$.

Par passage à la limite dans l'équation $(\star)$ on obtient alors $\displaystyle\zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x)$, c'est-à-dire, $\displaystyle\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1$. Cette inégalité étant vérifiée pour tout $x > 1$, on obtient lorsque $x \to 1^+$, $\displaystyle(x-1)\zeta(x) \xrightarrow[x\to1^+]{} 1$ donc $\displaystyle\zeta(x) \underset{x\to1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

6. En utilisant l'ensemble des questions précédentes, donner une représentation graphique la plus précise possible de la fonction ζ sur son domaine de définition.



Partie II : Un prolongement de la fonction ζ

On pose $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

7. Démontrer que η est défini sur $]0, +\infty[$.

   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La suite $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est alternée et la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante et tend vers 0 donc le théorème spécial des séries alternées assure la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. Par conséquent, η est bien définie sur $]0, +\infty[$.

8. Montrer que pour tout $x > 1$, on a : $\zeta(x) - \eta(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$.

   Soit $x > 1$. On a

   $$\zeta(x) - \eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^x} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{(2p)^x} = 2^{1-x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 2^{1-x}\zeta(x)$$

   car les termes impairs s'annulent.

9. Démontrer que la fonction $\widehat{\zeta}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par $\widehat{\zeta}(x) = \frac{\eta(x)}{1 - 2^{1-x}}$ est un prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ de la fonction ζ.

   Tout d'abord, $\widehat{\zeta}$ est un prolongement de ζ car $\widehat{\zeta}_{|]1,+\infty[} = \zeta$. De plus, d'après la question 4., $\widehat{\zeta}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

   La fonction $\left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1 - 2^{1-x}} = \frac{1}{1 - \exp((1-x)\ln(2))} \end{array} \right.$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1[$.

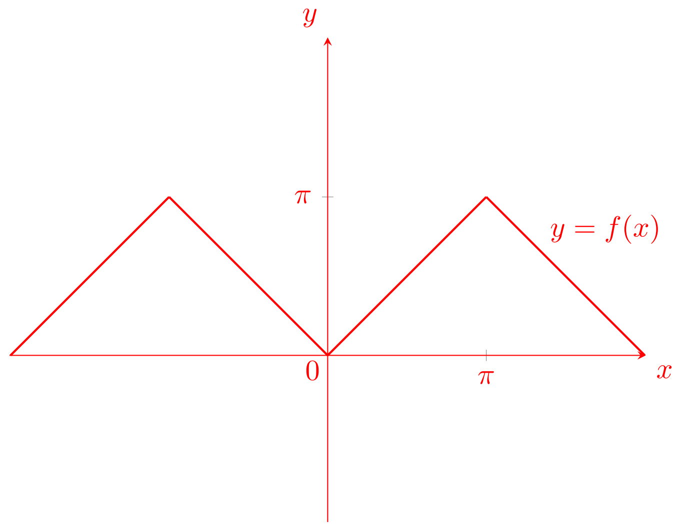
Il reste donc à prouver que la fonction η est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$.
Soit $n \geq 1$. La fonction $g_n : \left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} \end{array} \right.$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Pour $k \geq 1$ et $x \in]0,1[$ fixés, on a $g_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(-\ln(n))^k}{n^x}$.
Or, la suite $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}(-\ln(n))^k}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est alternée et la suite $\left(\dfrac{\ln(n)^k}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0.
Démontrons que cette dernière suite est décroissante à partir d'un certain rang.
Pour cela on considère la fonction $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\ln(t)^k}{t^x} \end{array} \right.$. La fonction φ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et pour tout $t \in [1,+\infty[$, $\varphi'(t) = \ln(t)^{k-1}t^{-x-1}(k - x\ln(t))$. Ainsi, φ est décroissante sur $\left[\exp(\frac{k}{x}), +\infty\right[$. Par conséquent, la suite $\left(\dfrac{\ln(n)^k}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante à partir du rang $N_0 = \lfloor \exp(\frac{k}{x}) \rfloor + 1$.
On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées qui assure la convergence simple de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n^{(k)}$. Soit $a \in]0,1[$. On a pour tout $N \geq N_0$ et $x \in [a,1[$, $\left|\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-\ln(n))^k}{n^x}\right| \leq \dfrac{\ln(N)^k}{N^x} \leq \dfrac{\ln(N)^k}{N^a} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. Donc la suite des restes de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n^{(k)}$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle de la forme $[a,1[$ avec $a > 0$. On en déduit que η est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$.
Ainsi, la fonction $\widehat{\zeta}$ est un prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ de la fonction ζ.

Partie III : Calcul de valeurs particulières

Dans cette partie on se propose de calculer les valeurs de $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\zeta(4) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ à l'aide d'une série de Fourier.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire, telle que $f(x) = x$ pour tout $x \in [0,\pi]$.

10. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction f.



f est une fonction paire donc pour tout $n \geq 1$ on a $b_n(f) = 0$.
De plus, le terme constant vaut $a_0(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t\,\mathrm{d}t = \dfrac{2\pi^2}{2\pi} = \pi$.
Enfin, pour tout $n \geq 1$ on a : $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t$.
On effectue une intégration par parties :

$$\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t = 0 + \left[\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{\cos(n\pi)-1}{n^2} = \frac{(-1)^n-1}{n^2}$$

car $\sin(n\pi) = 0$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Donc, pour tout $n \geq 1$, $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)$.

11. a) Justifier que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ on a : $|x| = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$.

La fonction f est continue sur $[0, \pi]$ puis sur $[-\pi, \pi]$ par parité et enfin sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité. f est de plus de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $]k\pi, (k+1)\pi[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Et, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\lim_{x\to 2p\pi^-} f'(x) = -1$, $\displaystyle\lim_{x\to 2p\pi^+} f'(x) = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to(2p+1)\pi^-} f'(x) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to(2p+1)\pi^+} f'(x) = -1$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Par suite, d'après le théorème de Dirichlet, f est égale à la somme de sa série de Fourier. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nx) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos(nx).$$

Or, pour tout $p \geq 0$ on a $(-1)^{2p} - 1 = 0$ et $(-1)^{2p+1} - 1 = -2$ donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos(nx) = -2\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos((2p+1)x).$$

Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = |x|$ donc on retrouve bien $|x| = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$.

b) En déduire que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Évaluons la relation obtenue à la question précédente en $x = 0$. On obtient :
$\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
Or, par somme de séries convergentes,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \frac{\pi^2}{8}.$$

Donc, $\dfrac{3}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$ ce qui donne bien $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

12. En utilisant la question 10. déterminer $\zeta(4)$.

La fonction f est continue donc l'égalité de Parseval s'écrit :

$$\frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \, \mathrm{d}t.$$

Cela donne :

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 n^4}((-1)^n - 1)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \, \mathrm{d}t,$$

donc, de la même manière qu'en 11.a),

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(2p+1)^4} = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^3}{3}.$$

On obtient ainsi : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{8} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^4}{96}$.

Or, par somme de séries convergentes, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{1}{16}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} + \frac{\pi^4}{96}$.

Donc, $\dfrac{15}{16}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$ ce qui donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{16\pi^4}{15 \times 96} = \frac{\pi^4}{90}$.

Partie IV : un lien avec les nombres premiers

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. Lorsque la suite $\left(\prod_{n=1}^{N} u_n\right)_{N\geq 1}$ converge vers une limite finie non nulle, on dit que le produit infini de terme général $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et on note : $\prod_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} u_n$.

Dans le cas contraire, on dit que le produit infini de terme général $(u_n)_{n\geq 1}$ diverge.

13. a) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. Démontrer que le produit infini de terme général $(u_n)_{n\geq 1}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} \ln(u_n)$ est convergente.

Dans un premier temps, supposons que la série $\sum_{n\geq 1} \ln(u_n)$ est convergente. Soit $N \geq 1$.

On a :

$$\prod_{n=1}^{N} u_n = \exp\left(\ln\left(\prod_{n=1}^{N} u_n\right)\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{N} \ln(u_n)\right).$$

La suite $\left(\prod_{n=1}^{N} u_n\right)_{N\geq 1}$ converge donc vers $\exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(u_n)\right) > 0$ par continuité de la fonction exponentielle donc le produit infini de terme général $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

Réciproquement, supposons que le produit infini de terme général $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. Alors,

$$\sum_{n=1}^{N} \ln(u_n) = \ln\left(\prod_{n=1}^{N} u_n\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln\left(\prod_{n=1}^{+\infty} u_n\right)$$

car $\prod_{n=1}^{+\infty} u_n > 0$ par définition de la convergence du produit infini et par continuité de la fonction logarithme. Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1} \ln(u_n)$ est convergente.

b) Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Supposons par l'absurde que l'ensemble des nombres premiers soit fini, on le note donc : $\{p_1, p_2, \ldots, p_{n_0}\}$ où $n_0 \in \mathbb{N}^*$ désigne le nombre de nombres premiers. On pose : $P = 1 + p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_{n_0}$. Alors P est un entier naturel non nul donc il admet une décomposition en facteurs premiers ce qui implique l'existence d'un indice $i_0 \in [\![1, n_0]\!]$ tel que p_{i_0} divise P. Or p_{i_0} divise aussi $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_{n_0}$ donc p_{i_0} divise $P - p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_{n_0} = 1$ ce qui n'est pas possible.

En conclusion, l'ensemble des nombres premiers est bien infini.

c) On note $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant et on fixe $x > 1$.

i) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(p_n)^x}$ converge.

La suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'entiers strictement croissante, elle vérifie donc pour tout $n \geq 1$, $p_n \geq n$. On a donc pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{p_n^x} \leq \frac{1}{n^x}$. Or, la série de terme général $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ converge car $x > 1$ donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n^x}$ converge.

ii) Après avoir justifié que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{1-p_n^{-x}} > 0$, établir la convergence du produit infini de terme général $\left(\frac{1}{1-p_n^{-x}}\right)_{n\geq 1}$.

Soit $n \geq 1$. On a $p_n > 1$ donc $1 - p_n^{-x} > 0$ donc $\frac{1}{1-p_n^{-x}} > 0$.

À présent, étudions la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{1}{1-p_n^{-x}}\right)$. On a,

$$\ln\left(\frac{1}{1-p_n^{-x}}\right) = -\ln(1-p_n^{-x}) \underset{n\to+\infty}{\sim} p_n^{-x}.$$

Or, la série de terme général $\left(\frac{1}{p_n^x}\right)_{n\geq 1}$ converge donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{1}{1-p_n^{-x}}\right)$ converge et donc que le produit infini de terme général $\left(\frac{1}{1-p_n^{-x}}\right)_{n\geq 1}$ converge.

14. Soit $x > 1$.

a) Fixons deux entiers naturels non nuls m et M. Justifier que $\prod_{k=1}^{m}\left(\sum_{i_k=0}^{M} \frac{1}{(p_k^{i_k})^x}\right) = \sum_{n\in A_{m,M}} \frac{1}{n^x}$ où $A_{m,M} = \left\{p_1^{i_1}p_2^{i_2}\dots p_m^{i_m} \mid (i_1,\dots,i_m) \in [\![0,M]\!]^m\right\}$.

On a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{m}\left(\sum_{i_k=0}^{M} \frac{1}{(p_k^{i_k})^x}\right) &= \sum_{i_1=0}^{M}\sum_{i_2=0}^{M}\cdots\sum_{i_m=0}^{M} \frac{1}{p_1^{i_1x}p_2^{i_2x}\dots p_m^{i_mx}}\\ &= \sum_{0\leq i_1,i_2,\dots,i_m\leq M} \frac{1}{(p_1^{i_1}p_2^{i_2}\dots p_m^{i_m})^x}\\ &= \sum_{n\in A_{m,M}} \frac{1}{n^x}.\end{aligned}$$

b) En déduire que $\zeta(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-p_n^{-x}}$.

Soit $N \geq 1$. On se donne m_0 et M_0 tels que $[\![1, N]\!] \subset A_{m_0,M_0}$. Par exemple, en prenant m_0 l'indice du plus grand nombre premier apparaissant dans les décompositions en facteurs premiers de tous les nombres de $[\![1, N]\!]$ et M_0 la plus grande puissance apparaissant dans les décompositions en facteurs premiers de tous les nombres de $[\![1, N]\!]$.
Remarquons qu'alors, on a $[\![1, N]\!] \subset A_{m,M}$ pour tous $m \geq m_0$ et $M \geq M_0$.

Soit donc $m \geq m_0$ et $M \geq M_0$. On a : $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n \in A_{m,M}} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, c'est-à-dire :
$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{i_k=0}^{M} \frac{1}{(p_k^{i_k})^x} \right) \leq \zeta(x)$.

Or, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $\sum_{i_k=0}^{M} \frac{1}{(p_k^{i_k})^x} = \sum_{i_k=0}^{M} \frac{1}{(p_k^x)^{i_k}} \xrightarrow[M \to +\infty]{} \frac{1}{1-p_k^{-x}}$.

Ce qui donne alors en passant à la limite $M \to +\infty$, $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-x}} \leq \zeta(x)$, puis, en passant à la limite $m \to +\infty$, on obtient : $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-p_k^{-x}} \leq \zeta(x)$.

Il ne reste plus qu'à faire tendre N vers $+\infty$ pour avoir $\zeta(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-p_k^{-x}}$.

15. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$.

Supposons par l'absurde que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ soit convergente. Dans ce cas, de manière similaire à 13.c)ii) on obtiendrait la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{1}{1-p_n^{-1}}\right)$ (puisque $\ln\left(\frac{1}{1-p_n^{-1}}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} p_n^{-1}$) et donc du produit de terme général $\left(\frac{1}{1-p_n^{-1}}\right)_{n \geq 1}$.

Or, pour tout $x > 1$ et tout $n \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{1-p_n^{-x}} \leq \frac{1}{1-p_n^{-1}}$ ce qui implique que pour tout $N \geq 1$, $\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-p_n^{-x}} \leq \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-p_n^{-1}}$. En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient d'après la question précédente $\zeta(x) \leq \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-p_n^{-1}}$ ce qui implique que ζ est bornée sur $]1, +\infty[$.
Or, on a observé que cela est faux en Partie I car $\zeta(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} +\infty$.

En conclusion, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

2 Problème d'algèbre

Notations

Dans ce problème n est un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2. Nous utiliserons également les notations suivantes :

- Pour tout nombre complexe z, le réel positif $|z|$ désigne le module de z.

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (*resp.* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels (*resp.* complexes).

- $\mathbb{R}^n$ (*resp.* $\mathbb{C}^n$) désigne l'ensemble des vecteurs à n coordonnées réelles (*resp.* complexes)

- Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on note : $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

- Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice $|A|$ est la matrice donnée par $(|a_{ij}|)_{1 \leq i,j \leq n}$.
  De même, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, le vecteur $|x|$ est le vecteur donné par $(|x_i|)_{1 \leq i \leq n}$.

- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A (qui est non vide) et on définit $\rho(A) = \max\{|\lambda| \,;\, \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\}$.

- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A considérée comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (qui est non vide) et on définit de la même manière $\rho(A) = \max\{|\lambda| \,;\, \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\}$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. On dira que λ_0 est une valeur propre dominante de A si pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on a $\lambda \neq \lambda_0 \implies |\lambda| < |\lambda_0|$.

Partie I : Généralités sur les matrices positives

- Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite positive (*resp.* strictement positive) si on a pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} \geq 0$ (*resp.* $a_{ij} > 0$). On notera alors $A \geq 0$ (*resp.* $A > 0$).

- Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A - B$ est positive (*resp.* strictement positive), on notera $A \geq B$ (*resp.* $A > B$).

- De même, un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est dit positif (*resp.* strictement positif) lorsque pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \geq 0$ (*resp.* $x_i > 0$). On notera alors $x \geq 0$ (*resp.* $x > 0$).

- Si x et y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $x - y$ est positif (*resp.* strictement positif), on notera $x \geq y$ (*resp.* $x > y$).

1. Exhiber une matrice positive, non nulle, qui ne soit pas strictement positive.
   La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement positive. Démontrer que si $AB = 0$, alors $A = 0$.
   On note $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On a $AB = 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = 0$. Comme $A \geq 0$ et $B > 0$ cela implique pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,k}b_{k,j} = 0$ puis $a_{i,k} = 0$. Ceci est vérifié pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ donc $A = 0$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ strictement positif et tel que $Ax = |A|x$. Démontrer que A est une matrice positive.
   On note $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$. On a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(|a_{i,k}| - a_{i,k})x_k = 0$.
   Comme x est strictement positif, on obtient $|a_{i,k}| = a_{i,k}$ pour tout $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$ et donc A est bien une matrice positive.

4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^n$. Démontrer que $|Ax| \leq |A||x|$.
   On note $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. La i-ème coordonnée de $|Ax|$ est $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k\right|$ qui est inférieure ou égal à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\,|x_k|$ par inégalité triangulaire, qui est la i-ème coordonnée de $|A||x|$. Par conséquent, on a $|Ax| \leq |A||x|$.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que A est positive si et seulement si pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ positif, le vecteur Ax est positif.
   On note $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Si A est positif et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est positif, alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k \geq 0$, donc les coordonnées de Ax sont toutes positives ce qui prouve que Ax est positif.
   Réciproquement, supposons que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ positif, le vecteur Ax est positif. On fixe $i \in [\![1,n]\!]$ et on pose $x^{(i)}$ le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème qui vaut 1. Le vecteur $x^{(i)}$ est positif et $Ax^{(i)}$ est la i-ème colonne de A. Donc tous les vecteurs colonnes de A sont positifs et ainsi A est positive.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que A est strictement positive si et seulement si pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ positif et non nul, le vecteur Ax est strictement positif.
   On note $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Si A est strictement positive et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est positif non nul, alors il existe $k_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_{k_0} > 0$ et donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k \geq a_{i,k_0}x_{k_0} > 0$, donc les coordonnées de Ax sont toutes strictements positives ce qui prouve que Ax est strictement positif.
   Réciproquement, supposons que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ positif et non nul, le vecteur Ax est strictement positif. On fixe $i \in [\![1,n]\!]$ et on pose $x^{(i)}$ le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème qui vaut 1. Le vecteur $x^{(i)}$ est positif et non nul et $Ax^{(i)}$ est la i-ème colonne de A. Donc tous les vecteurs colonnes de A sont strictement positifs et ainsi A est strictement positive.

Partie II : Théorème de Perron pour les matrices strictement positives

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement positive.
L'objectif de cette partie est de démontrer les résultats suivant :

- ✧ $\rho(A) > 0$,
- ✧ $\rho(A)$ est une valeur propre de A,
- ✧ $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
- ✧ l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ est une droite vectorielle dirigée par un vecteur strictement positif.

7. Démontrer que $\|.\|_1$ définit bien une norme sur $\mathbb{C}^n$.

   Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Supposons que $\|x\|_1 = 0$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0$ donc tous les x_i sont nuls donc $x = (0, \ldots, 0)$.

   Ensuite, soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $\|\lambda x\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda|\|x\|_1$.

   Enfin, soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.
   Alors : $\|x + y\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \|x\|_1 + \|y\|_1$.
   Ainsi, $\|.\|_1$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$.

8. On considère l'ensemble $X = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, x \geq 0 \text{ et } \|x\|_1 = 1\}$.
   Soit $x \in X$. On pose $K(x) = \{t \in \mathbb{R}_+ \,;\, tx \leq Ax\}$.

   a) Démontrer que $K(x) \subset [0, \alpha]$ où $\alpha = n \displaystyle\max_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}$.

      Soit $t \in K(x)$. Montrons que $t \leq \alpha$. On note i_0 l'indice de la plus grande coordonnée de x. Alors $x_{i_0} > 0$ puisque x est un vecteur positif non nul car $\|x\|_1 = 1$.
      Comme $tx \leq Ax$, on a en particulier

      $$t x_{i_0} \leq \sum_{k=1}^{n} a_{i_0,k} x_k \leq x_{i_0} \sum_{k=1}^{n} a_{i_0,k} \leq x_{i_0} n \max_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} = x_{i_0} \alpha,$$

      donc $t \leq \alpha$. Ainsi on a bien $K(x) \subset [0, \alpha]$.

   b) Démontrer que $K(x)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

      Soit $(t_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $K(x)$ convergeant vers un élément $t \in \mathbb{R}$. Alors, on a pour tout $p \geq 0$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $t_p x_i \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k$ donc $t x_i \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k$ par passage à la limite. Par conséquent, $t \in K(x)$ et donc $K(x)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

   c) Montrer que $K(x)$ est un compact de $\mathbb{R}$ et que $K(x)$ contient au moins un élément strictement positif.

$K(x)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$ donc un compact de $\mathbb{R}$. Il reste à prouver que $K(x)$ contient au moins un élément strictement positif. Soit $t_0 = \min_{1\leq i\leq n} a_{i,i} > 0$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$(Ax)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k \geq a_{i,i}x_i \geq t_0 x_i,$$

ce qui signifie que $t_0 x \leq Ax$ et donc que $t_0 \in K(x)$ avec $t_0 > 0$.

d) Justifier que l'ensemble $K(x)$ admet un maximum que l'on notera $\theta(x)$.
Soit $x \in X$. $K(x)$ est un compact de $\mathbb{R}$, il admet donc un maximum.

e) Justifier que l'ensemble $\{\theta(x)\,;\, x \in X\}$ admet une borne supérieure r_0 vérifiant $r_0 \in]0, +\infty[$.
Pour tout $x \in X$, on a $\theta(x) \leq n \max_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}$. Donc, $\{\theta(x)\,;\, x \in X\}$ est une partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}_+$, elle admet donc une borne supérieure r_0 dans $\mathbb{R}$. Étant donné que pour tout $x \in X$, $K(x)$ contient au moins un élément strictement positif, on a bien $r_0 \in]0, +\infty[$.

9. Dans cette question, on suppose qu'il existe un élément $x_0 \in X$ tel que $\theta(x_0) = r_0$ et $Ax_0 \neq r_0 x_0$.

a) Démontrer que le vecteur $A(Ax_0 - r_0 x_0)$ est strictement positif.
Comme $\theta(x_0) = r_0$, le vecteur $Ax_0 - r_0 x_0$ est positif et il est non nul par hypothèse donc d'après la question 6., $A(Ax_0 - r_0 x_0)$ est strictement positif.

b) En déduire qu'il existe un réel $\epsilon > 0$, que l'on fixera, tel que $A(Ax_0 - r_0 x_0 - \epsilon x_0) \geq 0$.
Notons $u = A(Ax_0 - r_0 x_0) > 0$ et $v = Ax_0 > 0$ (d'après la question 6.).
Alors, en posant $\epsilon = \min_{1\leq j\leq n} \frac{u_j}{v_j}$, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$(u - \epsilon v)_i = u_i - v_i \min_{1\leq j\leq n} \frac{u_j}{v_j} \geq u_i - \frac{v_i u_i}{v_i} = 0.$$

Donc $u - \epsilon v = A(Ax_0 - r_0 x_0 - \epsilon x_0) \geq 0$.

c) On pose $y = \frac{1}{\|Ax_0\|_1} Ax_0$. Démontrer que $y \in X$ et que $\theta(y) \geq r_0 + \epsilon$.
Le vecteur y est strictement positif donc positif car x_0 est positif et A est strictement positive. De plus, par homogénéité de la norme, on a bien $\|y\|_1 = \frac{1}{\|Ax_0\|_1}\|Ax_0\|_1 = 1$.
Donc on a bien $y \in X$.
Ensuite,

$$(r_0 + \epsilon)y = \frac{1}{\|Ax_0\|_1}(r_0 + \epsilon)Ax_0 \leq \frac{1}{\|Ax_0\|_1} A(Ax_0) = Ay.$$

Comme $y \in X$, on a par définition de $\theta(y)$ que $\theta(y) \geq r_0 + \epsilon$.

d) Conclure que si un élément $x_0 \in X$ vérifie $\theta(x_0) = r_0$, alors on a $Ax_0 = r_0 x_0$.
Le résultat précédent contredit la définition de r_0 donc l'hypothèse de l'énoncé est fausse. On a donc démontré par l'absurde que si un élément $x_0 \in X$ vérifie $\theta(x_0) = r_0$, alors on a forcément $Ax_0 = r_0 x_0$.

10. a) Démontrer que $X = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, x \geq 0 \text{ et } \|x\|_1 = 1\}$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$.

X est un ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ car toute limite de suite convergente de $X^{\mathbb{N}}$ est également dans X par passage à la limite dans les n inégalités larges portant sur les coordonnées et par continuité de la norme $\|.\|_1$. De plus X est borné car borné pour la norme $\|.\|_1$ en dimension finie.

Donc X est un compact de $\mathbb{R}^n$.

b) Démontrer l'existence d'un vecteur $x_0 \in X$ tel que $\theta(x_0) = r_0$.
On pourra commencer par introduire une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $\theta(x^{(k)}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} r_0$.

Par définition de la borne supérieure, on fixe une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $\theta(x^{(k)}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} r_0$.
L'ensemble X étant compact, on a l'existence d'une extractrice φ telle que la suite $(x^{(\varphi(k))})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $x_0 \in X$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\theta(x^{(\varphi(k))})x^{(\varphi(k))} \leq Ax^{(\varphi(k))}$, donc en passant à la limite on obtient : $r_0 x_0 \leq Ax_0$ ce qui implique $r_0 \leq \theta(x_0)$. Par définition de r_0, on obtient donc que $r_0 = \theta(x_0)$.

11. Déduire des questions 9. et 10. que $r_0 = \rho(A)$, que $\rho(A) > 0$ et que $\rho(A)$ est une valeur propre de A.

On a démontré qu'il existe un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\theta(x_0) = r_0$ ce qui implique $Ax_0 = r_0 x_0$. Ainsi, r_0 est une valeur propre de la matrice A.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Montrons que $|\lambda| \leq r_0$. Soit v un vecteur propre pour la valeur propre λ.
On a : $|\lambda||v| = |\lambda v| = |Av| \leq |A||v| = A|v|$ donc $|\lambda| \leq \theta(|v|) \leq r_0$.
Ainsi, on a bien $r_0 = \rho(A)$ et en particulier $\rho(A)$ est une valeur propre de A et $\rho(A) > 0$.

12. Il reste à prouver que $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ est une droite vectorielle dirigée par un vecteur strictement positif. Pour cela on considère une valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ de A vérifiant $|\lambda| = \rho(A)$ et on fixe un vecteur propre $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ associé à la valeur propre λ tel que $\|v\|_1 = 1$.

a) Démontrer que $|v|$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre $\rho(A)$ et en déduire que $|v| > 0$.

On a $\rho(A)|v| = |\lambda||v| = |\lambda v| = |Av| \leq |A||v| = A|v|$ donc $\rho(A) \leq \theta(|v|)$. Or, $\rho(A) = r_0$ donc $\rho(A) = \theta(|v|)$ donc, par la question 9. $|v|$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\rho(A)$. De plus, on a $\rho(A) > 0$ donc $|v| = \dfrac{1}{\rho(A)}A|v| > 0$ d'après la question 6.

b) En justifiant la relation $|Av| = A|v|$, déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}v_k\right| = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}|v_k|$.

On a $\rho(A)|v| = A|v|$ donc $|Av| = A|v|$.

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(|Av|)_i = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}v_k\right|$ et $(A|v|)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}|v_k|$.

On obtient ainsi que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}v_k\right| = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}|v_k|$.

c) Démontrer que v est colinéaire à $|v|$, c'est à dire qu'il existe $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $v = \xi|v|$. On pourra commencer par introduire les angles $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in]-\pi, \pi]^n$ tels que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $v_k = |v_k|e^{i\theta_k}$.

Comme suggéré dans l'énoncé, on écrit pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $v_k = |v_k|e^{i\theta_k}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}v_k\right|^2 &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2|v_k|^2 + \sum_{1\le j<k\le n}\left(a_{i,k}a_{i,j}|v_k||v_j|e^{i\theta_k}e^{-i\theta_j} + a_{i,k}a_{i,j}|v_k||v_j|e^{-i\theta_k}e^{i\theta_j}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2|v_k|^2 + 2\sum_{1\le j<k\le n} a_{i,k}a_{i,j}|v_k||v_j|\cos(\theta_k-\theta_j).\end{aligned}$$

Et, $\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}|v_k|\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2|v_k|^2 + 2\sum_{1\le j<k\le n} a_{i,k}a_{i,j}|v_k||v_j|$. D'après la question précédente, on a donc : $2\sum_{1\le j<k\le n} a_{i,k}a_{i,j}|v_k||v_j|(1-\cos(\theta_k-\theta_j)) = 0$.

Ainsi, pour tout $(j,k) \in [\![1, n]\!]^2$, $\cos(\theta_k - \theta_j) = 1$ c'est-à-dire $\theta_k = \theta_j$. Par conséquent, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $v_k = e^{i\theta_1}|v_k|$, ou encore $v = e^{i\theta_1}|v|$, et donc v est colinéaire à $|v|$.

d) Soit $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \in X$ un vecteur tel que $\theta(x_0) = \rho(A)$. On pose $t = \max\limits_{1\le j\le n}\left(\dfrac{-x_{0,j}}{|v_j|}\right)$ et $y = x_0 + t|v|$.

i) Calculer Ay et en déduire que $y = 0$.

Le vecteur y est positif mais pas strictement positif car la coordonnée où le maximum est atteint est nulle. Donc, par la question 6. si $y \neq 0$, on a $Ay > 0$. Or,

$$Ay = Ax_0 + tA|v| = \rho(A)(x_0 + t|v|) = \rho(A)y$$

est positif mais non strictement positif. Par suite, on a bien $y = 0$.

ii) Montrer que v est colinéaire à x_0.

Ainsi, $|v|$ est colinéaire à x_0. Or v et $|v|$ sont colinéaires donc v est colinéaire à x_0.

e) Conclure que $\lambda = \rho(A)$ et en déduire que $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On a démontré que tout vecteur propre pour la valeur propre λ était colinéaire à x_0 qui est un vecteur propre pour la valeur propre $r_0 = \rho(A)$ donc $\lambda = \rho(A)$.

Par suite, tout élément $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ distinct de $\rho(A)$ vérifie $|\mu| \neq \rho(A)$. Or, on a toujours $|\mu| \le \rho(A)$, donc cela implique $|\mu| < \rho(A)$.

Ainsi, $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A.

f) Conclure que l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ est une droite vectorielle dirigée par un vecteur strictement positif.

Soit $x_0 \in X$ un vecteur tel que $\theta(x_0) = \rho(A)$. Alors, on a montré que tout vecteur propre pour la valeur propre $\rho(A)$ est colinéaire à x_0. On en déduit que l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ est une droite dirigée par le vecteur x_0 qui est un vecteur strictement positif puisque $x_0 = \dfrac{1}{\rho(A)}Ax_0$.

Partie III : Généralisation aux matrices primitives

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive. On dit que A est une matrice primitive s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que A^k est une matrice strictement positive.

13. Donner un exemple d'une matrice primitive qui ne soit pas strictement positive.
La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas strictement positive mais elle est primitive car $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

L'objectif de cette partie est de généraliser les résultats obtenus en Partie II aux matrices primitives. On fixe donc une matrice primitive $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On fixe un entier k tel que A^k soit une matrice strictement positive et on pose $B = A^k$.

14. Démontrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{\lambda^k\,;\, \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\}$ et en déduire que $\rho(A) > 0$.
Les matrices A et B sont trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et leurs valeurs propres se lisent sur la diagonale des matrices triangulaires associées. Par multiplication de matrices triangulaires, on en déduit que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{\lambda^k\,;\, \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\}$. D'après la partie II, $\rho(B) > 0$. Or, $\rho(B) = \rho(A)^k$ donc $\rho(A) > 0$.

15. a) On fixe $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ tel que $\lambda^k = \rho(B)$. Montrer que $\lambda = \rho(A)$, ce qui prouve en particulier que $\rho(A)$ est une valeur propre de A.
Soit y un vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ. Alors y est un vecteur propre pour B associé à la valeur propre $\rho(B)$. D'après la Partie II, on a donc un complexe ξ tel que $y = \xi x$ où x est un vecteur strictement positif. Par suite x est un vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ donc $Ax = \lambda x$. Or A est positive et x est strictement positif donc, comme $\lambda \neq 0$, on a $\lambda > 0$ d'après la question 5. ce qui implique $\lambda = \rho(A)$.

    b) Démontrer que $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A considérée comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Si $|\lambda| = \rho(A)$ alors $|\lambda^k| = \rho(B)$. Par la Partie II, cela implique $\lambda^k = \rho(B)$ et donc $\lambda = \rho(A)$. Ainsi, $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A.

16. Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ est une droite vectorielle dirigée par un vecteur strictement positif.
Soit x un vecteur de $\mathbb{C}^n$ qui est un vecteur propre pour A associé à la valeur propre $\rho(A)$. Alors, x est un vecteur propre pour B associé à la valeur propre $\rho(A)^k = \rho(B)$. Or, par la Partie II, l'espace propre pour la matrice B associé à la valeur propre $\rho(B)$ est une droite vectorielle dirigée par un vecteur strictement positif. Ainsi, l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ est une droite vectorielle dirigée par un vecteur strictement positif.

17. Conclure que les résultats obtenus en Partie II se généralisent aux matrices primitives.
On a montré : $\rho(A) > 0$ (question 14), $\rho(A) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A (question 15) et l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ est une droite vectorielle dirigée par un vecteur strictement positif (question 16).
Ainsi, on a bien généralisé le résultat de la Partie II aux matrices primitives.

Partie IV : Application à la convergence de la suite des itérées des matrices stochastiques primitives

- Une matrice $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si elle est positive et si pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=1$.

- Si $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout entier naturel non nul p, on notera $(a_{i,j}^{(p)})_{1\le i,j\le n}$ les coefficients de la matrice A^p.

- Soit $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dira que la suite de matrices $(A^p)_{p\ge 0}$ converge vers une matrice $B=(b_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}^{(p)}\xrightarrow[p\to+\infty]{}b_{i,j}$.

18. Démontrer qu'un produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.
Soit $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ et $B=(b_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ deux matrices stochastiques.
Tout d'abord on a pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}\ge 0$ car A et B sont positives.
Ensuite, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}\right)=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\sum_{j=1}^{n}b_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}=1$.
Donc AB est bien une matrice stochastique.

19. Démontrer qu'une matrice stochastique et primitive admet 1 comme valeur propre dominante et que l'espace propre associé est une droite vectorielle dirigée par un vecteur strictement positif. Déterminer alors l'unique vecteur propre x associé à la valeur propre 1 qui soit strictement positif et tel que $\|x\|_1=1$.
Soit A une matrice stochastique et primitive. D'après la Partie III, $\rho(A)$ est une valeur propre dominante pour A et l'espace propre associé est une droite vectorielle dirigée par un vecteur strictement positif. Démontrons donc que $\rho(A)=1$.
Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Notons i_0 l'indice de $[\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}|=\displaystyle\max_{1\le i\le n}|x_k|>0$. On a $|Ax|=|\lambda x|=|\lambda||x|$ donc
$$|\lambda||x_{i_0}|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_{i_0,k}x_k\right|\le\sum_{k=1}^{n}a_{i_0,k}|x_k|\le|x_{i_0}|\sum_{k=1}^{n}a_{i_0,k}=|x_{i_0}|,$$
donc $|\lambda|\le 1$ ce qui prouve que $\rho(A)\le 1$. Or, pour $x=(1,\dots,1)$, on a $Ax=x$ car A est stochastique donc $\rho(A)=1$ et l'unique vecteur propre associé à la valeur propre A qui soit strictement positif et tel que $\|x\|_1=1$ est $\dfrac{1}{n}(1,\dots,1)$.

20. Soit $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que pour tout $p\ge 1$ on a :
$$\max_{1\le i,j\le n}\left|a_{i,j}^{(p)}\right|\le\max_{1\le i,j\le n}|a_{i,j}|\times\left(\max_{1\le j\le n}\sum_{k=1}^{n}|a_{k,j}|\right)^{p-1}.$$

On démontre l'inégalité par récurrence sur $p \geq 1$.
Pour $p = 1$, on a bien $\max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}| \leq \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$.
Supposons que l'égalité soit vérifiée à un certain rang $p \geq 1$. Alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$|a_{i,j}^{(p+1)}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^{(p)} a_{k,j}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}^{(p)}||a_{k,j}| \leq \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}^{(p)}| \sum_{k=1}^{n} |a_{k,j}|,$$

donc, par hypothèse de récurrence,

$$|a_{i,j}^{(p+1)}| \leq \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}| \times \left(\max_{1\leq j\leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{k,j}|\right)^{p-1} \times \sum_{k=1}^{n} |a_{k,j}| \leq \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}| \times \left(\max_{1\leq j\leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{k,j}|\right)^{p},$$

ce qui achève l'hérédité en passant au maximum sur (i,j) à gauche de l'inégalité.
Ainsi, on a démontré que pour tout $p \geq 1$ on a :

$$\max_{1\leq i,j\leq n} \left|a_{i,j}^{(p)}\right| \leq \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}| \times \left(\max_{1\leq j\leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{k,j}|\right)^{p-1}.$$

21. Dans cette question on fixe A une matrice stochastique et primitive.
    a) Justifier l'existence d'une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ où $T \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont tous de module strictement inférieur à 1.

       La matrice A est trigonalisable dans $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres se trouvent sur la diagonale de la matrice triangulaire alors obtenue. De plus, elle admet 1 comme valeur propre dominante et le sous-espace propre associé est une droite vectorielle stable par A.

       Donc il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ où $T \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont tous de module strictement inférieur à 1.

    b) Pour tout $\delta > 0$, on définit la matrice $D(\delta) = \operatorname{diag}(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{n-2})$ diagonale de coefficients diagonaux successifs $1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{n-2}$ et on pose $\hat{T} = D(\delta)^{-1}TD(\delta)$.
       On note $\hat{T} = (\hat{t}_{i,j})_{1\leq i,j\leq n-1}$.

       Démontrer qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $\delta \in]0, \delta_0[$, on ait $\max\limits_{1\leq j\leq n-1} \sum\limits_{k=1}^{n-1} |\hat{t}_{k,j}| < 1$.

       On a : $TD = \left(t_{i,j}\delta^{j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n-1}$ puis $\hat{T} = \left(\dfrac{t_{i,j}\delta^{j-1}}{\delta^{i-1}}\right)_{1\leq i,j\leq n-1} = (t_{i,j}\delta^{j-i})_{1\leq i,j\leq n-1}$.

On a donc pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} |\hat{t}_{k,j}| = \sum_{k=1}^{n-1} |t_{k,j}|\delta^{j-k} = |t_{j,j}| + \sum_{k=1}^{j-1} |t_{k,j}|\delta^{j-k},$$

car T est triangulaire supérieure donc $k > j \implies t_{k,j} = 0$.

On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} |t_{k,j}|\delta^{j-k} = \delta \sum_{k=1}^{j-1} |t_{k,j}|\delta^{j-k-1} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$. Or tous les coefficients diagonaux de T sont de module strictement plus petit que 1 donc, il existe donc $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $\delta \in]0, \delta_0[$, on ait : $\displaystyle\max_{1 \leq j \leq n-1} \sum_{k=1}^{j-1} |t_{k,j}|\delta^{k-j} \leq \frac{1 - \max\limits_{1 \leq j \leq n-1} |t_{j,j}|}{2}$.

Par conséquent, pour $\delta \in]0, \delta_0[$, on a : $\displaystyle\max_{1 \leq j \leq n-1} \sum_{k=1}^{n-1} |\hat{t}_{k,j}| \leq \frac{1 + \max\limits_{1 \leq j \leq n-1} |t_{j,j}|}{2} < 1$.

c) Démontrer que la suite $(T^p)_{p \geq 1}$ converge vers la matrice nulle.
Tout d'abord, on a, d'après les questions 20 et 21.b) :

$$\max_{1 \leq i,j \leq n-1} \left|\hat{t}_{i,j}^{(p)}\right| \leq \max_{1 \leq i,j \leq n-1} |\hat{t}_{i,j}| \times \left(\max_{1 \leq j \leq n-1} \sum_{k=1}^{n-1} |\hat{t}_{k,j}|\right)^{p-1} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$$

pour $\delta \in]0, \delta_0[$ car $\displaystyle\max_{1 \leq j \leq n-1} \sum_{k=1}^{n-1} |\hat{t}_{k,j}| < 1$.

Donc $(\hat{T}^p)_{p \geq 1}$ converge vers la matrice nulle donc $(T^p)_{p \geq 1} = (D(\delta)\hat{T}^p D(\delta)^{-1})_{p \geq 1}$ aussi par continuité de la multiplication matricielle.

d) En déduire la convergence de la suite $(A^p)_{p \geq 0}$ vers une matrice stochastique ayant toutes ses lignes égales.
Soit $p \geq 1$. On a, par multiplication de matrices diagonales par bloc,

$$(P^{-1}AP)^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T^p & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Or, $(P^{-1}AP)^p = P^{-1}A^pP$ donc $A^p = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T^p & \\ 0 & & & \end{pmatrix} P^{-1}$.

Ainsi la suite $(A^p)_{p \geq 1}$ converge vers la matrice $A^\infty = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} P^{-1}$. On note $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $P^{-1} = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Par trigonalisation, la première colonne de P est constituée d'un vecteur propre pour A associé à la valeur propre 1. D'après la question 19, on peut choisir comme première colonne de P le vecteur $(1, 1, \ldots, 1)$. Alors, par produit matriciel, le coefficient $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} P^{-1}$ vaut $q_{1,j}$ si $i = 1$ et 0 sinon.

Donc, par produit matriciel, le coefficient $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ de A^∞ est donné par $q_{1,j}$. Ainsi la matrice A^∞ est de la forme : $A^\infty = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,n} \\ q_{1,1} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{1,1} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,n} \end{pmatrix}$ donc toutes ses lignes sont égales.

Enfin, A^∞ est une matrice stochastique par la question 18. car pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $q_{1,j} = \lim\limits_{p \to +\infty} a_{1,j}^{(p)} \geq 0$, et, par passage à la limite dans les relations $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}^{(p)} = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ ce qui donne $\sum\limits_{j=1}^{n} q_{1,j} = 1$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, N désigne l'ensemble des entiers naturels, R l'ensemble des nombres réels, e le nombre de Néper et Ln le logarithme népérien

Exercice n° 1

Soit p la projection vectorielle de R^3 sur le plan P d'équation : $x+y+z=0$ parallèlement à la droite D d'équation : $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Montrer que R^3 est la somme directe de P et D.

La droite D est engendrée par le vecteur $e_3 = (1,2,3)$ et ce vecteur n'est pas dans le plan P, donc l'intersection entre D et P est réduite au vecteur nul. De plus, dim D + dim P=3. On a bien une somme directe.

2. Soit $u = (x, y, z) \in R^3$, déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de R^3.

Pour $\alpha \in R$, on a : $u - \alpha\, e_3 \in P \;\leftrightarrow (x - \alpha, y - 2\alpha, z - 3\alpha) \in P \leftrightarrow \alpha = \frac{1}{6}(x + y + z)$.

La projection de u sur le plan P et parallèlement à D est :

$$p(u) = u - \frac{x+y+z}{6}\, e_3 = \frac{1}{6}(5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z)$$

La matrice de p dans la base canonique est donc : $M(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

3. Déterminer une base de R^3 dans laquelle la matrice de p est diagonale.

La matrice de p est diagonale dans une base de vecteurs propres, formée avec le vecteur e_3 pour la valeur propre zéro et deux vecteurs (propres pour la valeur propre 1) de P, par exemple : $e_1 = (1, -1, 0)$; $e_2 = (1, 0, -1)$.

Exercice n° 2

1. La matrice adjacente associée au graphe (cf. énoncé) s'écrit :
$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et son noyau est : $Ker\ A = \{(x, y, z, t) \in R^4 / z = 0, x + y + t = 0\}$ de dimension 2.

2. Les valeurs propres de A sont : zéro (double) et $\pm\sqrt{3}$ (il suffit de développer le déterminant de $A - \gamma\ I$ par rapport à la première colonne).

3. Pour le calcul des puissances de la matrice A, on a : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis : $A^3 = 3A$.
En conclusion : $A^{2n+1} = 3^n A$ et $A^{2n} = 3^{n-1} A^2$ (la récurrence est immédiate).

4. Les matrices demandées sont les suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer le polynôme caractéristique de la matrice L, on peut (par exemple) ajouter toutes les autres colonnes à la première colonne pour mette en facteur le paramètre, puis on développe par rapport à la première ligne pour obtenir : $\det(L - \lambda I) = \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$.
Les valeurs propres sont donc : 0, 1 (double) et 4.

Exercice n° 3

Soit la fonction numérique *f* définie par : $f(x) = \dfrac{1}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)}$

1. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_1^e \frac{1}{(1+t)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t+1}\right]_1^e = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e} \text{ (en posant } t = e^x\text{)}$$

2. Etudier la convergence de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} \approx \dfrac{1}{e^x}$ qui est convergente car, par exemple, $\lim\limits_{+\infty} (x^2 . \dfrac{1}{e^x}) = 0$

3. Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction *f*.

La fonction est paire (graphe symétrique par rapport à l'axe verticale et on restreint l'étude aux nombres réels positifs). Sa dérivée est égale à : $f^{'}(x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{(1+e^{x})^2(1+e^{-x})^2}$ qui s'annule pour x=0 et est négative. La fonction est strictement décroissante de $[0,+\infty[$ sur $[1/4,0[$.

Exercice n° 4

Soit la fonction numérique g définie par : $g(x) = \frac{1}{(x+1)^2(3-x)}$
1. Déterminer la primitive G de g sur l'intervalle $]-1,3[$ telle que : $G(1)$=0.
On décompose la fraction rationnelle en éléments simples pour obtenir :
$g(x) = \frac{1}{16}(\frac{1}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{1}{x-3})$ et pour la primitive :

$$G(x) = \frac{1}{16}(Ln(x+1) - \frac{4}{x+1} - Ln\,(3-x) + 2)$$

2. Donner un développement limité d'ordre n de g au voisinage de 0.
On rappelle les développements suivants :

$$\frac{1}{1+x} = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k\right) + o(x^n)$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k (k+1) x^k\right) + o(x^n)$$

$$\frac{-1}{x-3} = \frac{1}{3(1-\frac{x}{3})} = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}(\frac{x}{3})^k\right) + o(x^n)$$

On obtient :

$$g(x) = \frac{1}{16}\left(\sum_{k=0}^{n}((-1)^k(4k+5) + \frac{1}{3^{k+1}})x^k\right) + o(x^n)$$

3. En déduire la valeur de la dérivée troisième de G en zéro.

On a : $G^{(3)}(0) = g^{(2)}(0) = \frac{44}{27}$

Exercice n° 5

On considère les suites (u_n) et (λ_n) définies par les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}};\ \lambda_{n+1} = \frac{\lambda_n}{u_{n+1}}$$

1. Montrer que pour $u_1 = 0$ et $\lambda_1 = 2$, il existe deux autres suites (θ_n) et (α_n) telles que pour tout entier *n* strictement positif, on a :

$u_n = \cos(\theta_n);\ \lambda_n = \alpha_n \sin(\theta_n);\ 0 \le \theta_n \le \pi/2$. Montrer que la suite (λ_n) est convergente, on précisera sa limite.

Montrons par récurrence sur *n*, la propriété :

$P(n): u_n$ et λ_n existent et valent $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right);\ \lambda_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

On peut calculer $u_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} = cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\lambda_2 = 2\sqrt{2} = 4\ sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

La propriété précédente est vraie pour *n*=1.

Comme u_n est positif, u_{n+1} existe et vaut $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

Et $\lambda_{n+1} = \frac{\lambda_n}{u_{n+1}} = \frac{2^n\, sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = 2^{n+1}\ sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ (on écrit $\frac{\pi}{2^n} = 2 \times \frac{\pi}{2^{n+1}}$).
On pose alors $\theta_n = \frac{\pi}{2^n};\ \alpha_n = 2^n$. $\underset{n}{Lim}\,\lambda_n = \underset{n}{Lim}\, 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \underset{n}{Lim}\, 2^n\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \pi$

2. En utilisant la formule de Taylor, montrer que, pour tout $n \ge 1$, on a l'inégalité :

$|\pi - \lambda_n| \le \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}$. En déduire un entier *N* tel que : $|\pi - \lambda_N| \le 10^{-6}$

Rappelons que : $\left|\sin^{(2p+1)}(x)\right| \le 1$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2*p*+1 appliquée à la fonction sinus entre 0 et *x* donne :

$$\left| sin(x) - \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \le \frac{|x|^{2p+3}}{(2p+3)!}$$

En particulier pour *p*=0 et $x = \frac{\pi}{2^n}$, on en déduit :

$|\pi - \lambda_n| = 2^n \left| sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - \frac{\pi}{2^n} \right| \le \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}$ et on peut prendre *N*=12, car $\frac{\pi^3 \times 10^6}{6} \le 4^{12}$

Exercice n° 6

Soit f une fonction numérique définie sur R^2 par $f(0,0)=0$ et :

$$f(x,y)=\frac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0).$$

1. Etudier la continuité de f sur R^2.

La fonction est indéfiniment différentiable sur $R^2-(0,0)$. Tout le problème est à l'origine pour chaque question. En utilisant les coordonnées polaires, à savoir : $x=r\cos\theta$; $y=r\sin\theta$:

$$\lim_{(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to0}\frac{4r^4\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2}=0=f(0,0)$$

et f est continue.

2. Etudier la différentiabilité de f sur R^2.

$$f_x'(0,0)=\underset{x\to0}{Lim}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0=f_y'(0,0), \text{car } f(x,y)=-f(y,x)$$

Si f est différentiable à l'origine, alors sa différentielle est nulle. Ce qui est le cas, car $\underset{(0,0)}{Lim}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\underset{r\to0}{Lim}\frac{r^4\varphi(\theta)}{r^3}=0$, où $\varphi(\theta)=4\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$.

3. La fonction f est-elle de classe C^2 sur R^2 ?

Si la fonction f est de classe C^2 sur R^2, alors $f_{xy}''(0,0)=f_{yx}''(0,0)$

On a : $f_{xy}''(0,0)=\underset{y\to0}{Lim}\frac{f_x'(0,y)-f_x'(0,0)}{y}=\underset{y\to0}{Lim}\frac{-4y^5}{y^5}=-4$

Et comme $f(x,y)=-f(y,x)$, on a : $f_{yx}''(0,0)=4$ et f n'est pas de classe C^2.

Exercice n° 7

On considère la fonction réelle f définie sur l'intervalle $[0,2]$ par

$$f(x)=\begin{cases}1 \ si\ 0\leq x\leq\sqrt{3}\\ \sqrt{4-x^2}\ si\ \sqrt{3}\leq x\leq 2\end{cases}$$

Soit D le domaine du plan défini ainsi : $D=\{(x,y)\epsilon R^2|0\leq x\leq 2 \ \ et\ 0\leq y\leq f(x)\}$.

On considère le solide engendré par la rotation de ce domaine D autour de l'axe des abscisses.

1. Calculer le volume de ce solide.

On considère les disques autour de l'axe des abscisses. On a :

$$V = \pi \int_0^2 f^2(x)dx = \pi(\int_0^{\sqrt{3}} dx + \int_{\sqrt{3}}^2 (4 - x^2)dx) = \pi(\frac{16}{3} - 2\sqrt{3})$$

2. En utilisant la même démarche qu'à la question précédente, retrouver le volume d'une sphère de rayon *R*.

On considère le domaine plan $E = \{(x, y) \in R^2 \ / \ 0 \leq x; 0 \leq y; \ x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Le volume est égal à : $V = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi \, R^3$