

AVRIL 2026

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG /
ANALYSTES STATISTICIENS

ISE Cycle long / AS

CORRIGÉ de la 1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Avertissement !

- Le sujet comporte sept exercices et cinq pages numérotées de 1 à 5.
- L'exercice 1 est composé de 10 questions indépendantes entre elles, toutes notées sur 1 point. Une note strictement inférieure à 6 est éliminatoire. Toutefois, cet exercice ne comptera que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve.

Notations

- On désigne par \mathbb{N} l'ensemble des *entiers naturels*, et on pose : $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- On désigne par \mathbb{R} l'ensemble des *nombres réels*, par \mathbb{R}_+ l'ensemble des *nombres réels positifs ou nuls*, par \mathbb{R}_- l'ensemble des *nombres réels négatifs ou nuls*, et on pose : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- On désigne par \mathbb{C} l'ensemble des *nombres complexes*.

Exercice 1

1. Calculer l'intégrale $\int_2^3 \frac{2x}{1+x^2} dx$, en simplifiant le résultat le plus possible.

La fonction $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est continue sur le segment $[2, 3]$ et admet la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ pour primitive sur celui-ci, donc d'après le théorème fondamental du calcul intégral :

$$\int_2^3 \frac{2x}{1+x^2} dx = [\ln(1+x^2)]_{x=2}^{x=3} = \ln(10) - \ln(5) = \ln(2).$$

2. Déterminer tous les nombres $m \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'équation $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m + 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, possède exactement deux solutions distinctes.

Si $m = 1$, l'équation est de degré 1 et ne possède qu'une solution.

Si $m \neq 1$, l'équation possède deux solutions si et seulement si son discriminant est strictement positif. Or ici, celui-ci vaut :

$$(2(m-2))^2 - 4(m-1)(m+1) = 4((m-2)^2 - (m-1)(m+1)) = 4(5-4m).$$

L'équation possède deux solutions si et seulement si $m < \frac{5}{4}$ et $m \neq 1$, c'est-à-dire si et seulement si $m \in]-\infty, \frac{5}{4}[\setminus \{1\}$.

3. Montrer que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{3x^3 + 2x^2 + 7x - 1}{x^2 + 3}$ possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, dont on déterminera une équation cartésienne.

Pour tout $x > 0$:

$$\frac{\frac{3x^3 + 2x^2 + 7x - 1}{x^2 + 3}}{x} = \frac{3x^3 + 2x^2 + 7x - 1}{x(x^2 + 3)} = \frac{x^3}{x^3} \times \frac{3 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x^3}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1} = 3,$$

puis :

$$\frac{3x^3 + 2x^2 + 7x - 1}{x^2 + 3} - 3x = \frac{3x^3 + 2x^2 + 7x - 1}{x^2 + 3} - \frac{3x(x^2 + 3)}{x^2 + 3} = \frac{2x^2 + 4x - 1}{x^2 + 3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2.$$

Donc la fonction possède la droite d'équation cartésienne : $y = 3x + 2$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$.

4. Étudier la limite de $\frac{\ln(x)^2 - 4x^3}{x \ln(x)^4 - 1}$ lorsque x tend vers 0^+ .

Par somme et composition des limites : $\ln(x)^2 - 4x^3 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, et par croissance com-

parée : $x \ln(x)^4 - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -1$, donc par quotient : $\frac{\ln(x)^2 - 4x^3}{x \ln(x)^4 - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. On admet que la fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} . Calculer sa dérivée.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

6. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$. Montrer

que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 3} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison. On admettra que les suites sont bien définies.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{3+2u_n}{u_{n+4}} - 1}{\frac{3+2u_n}{u_{n+4}} + 3} = \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} = \frac{1}{5}v_n.$$

La suite est géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

7. On appelle *anagramme* d'un mot tout autre mot composé des mêmes lettres, mais dans un ordre quelconque. Par exemple, le mot « NUCOROCS » est un anagramme du mot « CONCOURS ».

(a) Combien le mot « AFRIQUE » a-t-il d'anagrammes ?

Pour la première place, on a 7 possibilités, 6 pour la deuxième, 5 pour la cinquième lettre... Le mot a donc $7! = 5040$ possibilités.

(b) Combien le mot « CAPESA » a-t-il d'anagrammes ?

On fixe d'abord la place des « A », il y a $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \times 4!} = 15$ possibilités.

Ensuite, on place les autres lettres, il y a $4! = 24$ possibilités.

Ainsi, il y a $15 \times 24 = 360$ anagrammes.

8. (a) Déterminer une forme exponentielle de $1 + i\sqrt{3}$ et de $1 - i$.

$$\text{On a : } 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad \text{et : } 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

(b) En déduire une forme exponentielle de $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$.

$$\text{Ainsi : } \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}.$$

9. Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, 3f'(x) + 2f(x) = 0$ et $f(1) = 3$.

Les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, 3f'(x) + 2f(x) = 0$ sont toutes les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-\frac{2x}{3}}$, où λ décrit \mathbb{R} .

Celle pour laquelle $f(1) = 3$ vérifie : $\lambda e^{-\frac{2}{3}} = 3 \iff \lambda = 3e^{\frac{2}{3}}$.

L'unique fonction solution est donc la fonction $x \mapsto 3e^{\frac{2}{3}}e^{-\frac{2x}{3}} = 3e^{\frac{2(1-x)}{3}}$.

10. Résoudre l'équation $z^5 - z^2 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z^5 - z^2 = 0 &\iff z^2(z^3 - 1) = 0 \\ &\iff z^2 = 0 \text{ ou } z^3 = 1 \\ &\iff z = 0 \text{ ou } z \in \{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\}. \end{aligned}$$

Exercice 2

On rappelle que pour deux évènements A et B , si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on appelle *probabilité de A sachant B* , et on note $\mathbb{P}(A|B)$, le nombre : $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

1. *Formules de Bayes.* Soient A et B deux évènements avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

(a) Montrer que : $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.

$$\text{On a : } \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

(b) Montrer que : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A}) \times \mathbb{P}(\bar{A})$.

Comme $(B \cap A, B \cap \bar{A})$ forme une partition de B , on a : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A})$. Et par définition de la probabilités conditionnelle : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A}) \times \mathbb{P}(\bar{A})$.

On dispose de 100 dés cubiques, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Parmi ces 100 dés, 25 sont truqués : la probabilité d'obtenir un 6 pour ceux-ci vaut $\frac{1}{2}$.

2. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé une fois et on obtient le nombre 6. En utilisant la question 1., calculer la probabilité que ce dé soit truqué. On pourra noter T l'évènement : « le dé choisi est truqué », et A l'évènement : « on obtient un 6 lors du lancer ».

On cherche $\mathbb{P}[T|A]$.

$$\text{On a : } \mathbb{P}(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\bar{T}) = \frac{3}{4}.$$

$$\text{D'après la formule : } \mathbb{P}[T|A] = \frac{\mathbb{P}(T)\mathbb{P}(A|T)}{\mathbb{P}(A|T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(A|\bar{T})\mathbb{P}(\bar{T})} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois un 6. On note p_n la probabilité que ce dé soit truqué.

(a) Expliciter p_n en fonction de n .

On note maintenant A l'évènement « on n'obtient que des 6 durant les n lancers ». On cherche $p_n = \mathbb{P}(T|A)$.

D'après l'énoncé, la probabilité d'obtenir 6 pour un dé truqué vaut $1/2$. Les n tirages étant indépendants, on en déduit que $\mathbb{P}(A|T) = (1/2)^n$.

Pour un dé non truqué, la probabilité d'obtenir 6 vaut $1/6$ et donc $\mathbb{P}(A|\bar{T}) = (1/6)^n$.

On sait par ailleurs que $\mathbb{P}(T) = 1/4$ et $\mathbb{P}(\bar{T}) = 3/4$.

On en déduit donc à l'aide de la formule de Bayes :

$$p_n = \frac{\mathbb{P}(T)\mathbb{P}(A|T)}{\mathbb{P}(A|T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(A|\bar{T})\mathbb{P}(\bar{T})} = \frac{\frac{1}{4} \times (\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{2})^n \times \frac{1}{4} + (\frac{1}{6})^n \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$$

(b) Déterminer la limite de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Interpréter le résultat.

$$\text{On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1.$$

Lorsqu'on effectue un grand nombre de lancers, et si on obtient que des 6, il y a de fortes chances que le dé soit pipé.

Exercice 3

Dans l'espace \mathbb{R}^3 muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on appelle \mathcal{D}_1 la droite passant par le point $A(0, -1, 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1, 1, 1)$, et \mathcal{D}_2 la droite passant par le point $B(0, 1, 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{v}(1, 0, 1)$.

1. Montrer que \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont coplanaires, c'est-à-dire qu'il existe un plan \mathcal{P} pour lequel $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{P}$.

Méthode 1. On a : $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0) = 2\vec{u} - 2\vec{v}$, donc les droites sont coplanaires.

Méthode 2. Le plan \mathcal{P} d'équation cartésienne $x - z = 0$ convient.

Pour tout point M de l'espace \mathbb{R}^3 , on note $p_1(M)$ (resp. $p_2(M)$) la projection orthogonale de M sur \mathcal{D}_1 (resp. \mathcal{D}_2). On rappelle que $p_1(M)$ (resp. $p_2(M)$) est par définition l'unique point de \mathcal{D}_1 (resp. \mathcal{D}_2) pour lequel :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{Mp_1(M)} = 0 \quad (\text{resp.} \quad \vec{v} \cdot \overrightarrow{Mp_2(M)} = 0).$$

2. Dans cette question, on fixe un point $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, et on pose : $\lambda = \frac{x + y + z + 1}{3}$.

- (a) Vérifier que $p_1(M)$ a pour coordonnées $(\lambda, \lambda - 1, \lambda)$.

Notons N le point de coordonnées $(\lambda, \lambda - 1, \lambda)$. On a $N = (0, -1, 0) + \lambda(1, 1, 1)$, donc $N \in \mathcal{D}_1$. Calculons ensuite le produit scalaire $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MN}$:

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \lambda \\ y - \lambda + 1 \\ z - \lambda \end{pmatrix} = x + y + z + 1 - 3\lambda = 0.$$

La projection $p_1(M)$ étant par définition l'unique point de \mathcal{D}_1 vérifiant $\vec{u} \cdot \overrightarrow{Mp_1(M)} = 0$, cela montre que $N = p_1(M)$.

- (b) Déterminer de même les coordonnées de $p_2(M)$. *Indication : vous pourrez remarquer que tout point de \mathcal{D}_2 est de la forme $(\mu, 1, \mu)$ pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$.*

Comme $p_2(M) \in \mathcal{D}_2$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ pour lequel $p_2(M) = (\mu, 1, \mu)$.

Or $\vec{v} \cdot \overrightarrow{Mp_2(M)} = 0$, donc $(x - \mu) + (z - \mu) = 0$, c'est-à-dire $\mu = \frac{x + z}{2}$, d'où $p_2(M) = \left(\frac{x + z}{2}, 1, \frac{x + z}{2} \right)$.

3. Soit $H(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer l'ensemble des points $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ayant les mêmes projections orthogonales sur \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 que H , c'est-à-dire :

$$\{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / p_1(M) = p_1(H) \quad \text{et} \quad p_2(M) = p_2(H)\}.$$

Pour tout $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$p_1(M) = p_1(H) \quad \text{et} \quad p_2(M) = p_2(H) \iff \begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ x + z = a + c \end{cases} \iff \begin{cases} y = b \\ z = a + c - x. \end{cases}$$

On reconnaît la droite passant par le point $(0, b, a + c)$ et dirigée par le vecteur $(1, 0, -1)$.

4. (a) Déterminer les coordonnées du milieu I de $[p_1(M)p_2(M)]$ pour tout $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{On a } I \left(\frac{5x + 2y + 5z + 2}{12}, \frac{x + y + z + 1}{6}, \frac{5x + 2y + 5z + 2}{12} \right).$$

- (b) Décrire l'ensemble \mathcal{I} des points I lorsque M parcourt \mathbb{R}^3 .

On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \left\{ \left(\frac{5x + 2y + 5z + 2}{12}, \frac{x + y + z + 1}{6}, \frac{5x + 2y + 5z + 2}{12} \right) \right\}_{x,y,z \in \mathbb{R}} \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right) + \frac{x+z}{12}(5, 2, 5) + \frac{y}{6}(1, 1, 1) \right\}_{x,y,z \in \mathbb{R}}. \end{aligned}$$

On reconnaît le plan passant par le point $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6} \right)$ et dirigé par les vecteurs $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

On se place dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On rappelle que :

- pour deux points A et B d'affixes respectifs a et b , le vecteur \overrightarrow{AB} a pour affixe $b - a$;
- l'angle entre deux vecteurs d'affixes respectifs z_1 et z_2 , tous deux supposés non nuls, correspond à l'argument du nombre complexe $\frac{z_1}{z_2}$.

1. (a) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $(1 - i3\sqrt{3})^2$.

$$\text{On a : } (1 - i3\sqrt{3})^2 = -26 - i6\sqrt{3}.$$

- (b) Résoudre l'équation : $z^2 - (9 + i\sqrt{3})z + 26 + 6i\sqrt{3} = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$$\text{Le discriminant est : } (9 + i\sqrt{3})^2 - 4(26 + 6i\sqrt{3}) = -26 - i6\sqrt{3} = (1 - i3\sqrt{3})^2.$$

L'équation possède donc deux solutions :

$$\frac{9 + i\sqrt{3} - (1 - i3\sqrt{3})}{2} = 4 + 2i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \frac{9 + i\sqrt{3} + (1 - i3\sqrt{3})}{2} = 5 - i\sqrt{3}.$$

On pose $a = 5 - i\sqrt{3}$ et on note A l'image de a . On considère de plus le point B d'affixe $b = ae^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe b .

$$\text{On a : } b = ae^{i\frac{\pi}{3}} = (5 - i\sqrt{3}) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) = 4 + i2\sqrt{3}.$$

3. Déterminer l'affixe q du point Q milieu de $[OB]$.

$$\text{On a : } q = \frac{b}{2} = 2 + i\sqrt{3}.$$

4. Déterminer l'affixe k du point K tel que $ABQK$ soit un parallélogramme.

On cherche K tel que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{QK}$, c'est-à-dire qu'on cherche $k \in \mathbb{C}$ tel que $a - b = k - q$, soit :

$$k = a - b + q = 3 - i2\sqrt{3}.$$

5. (a) Vérifier que $\frac{k-a}{k}$ est imaginaire pur.

On a : $\frac{k-a}{k} = -\frac{i}{\sqrt{3}} \in i\mathbb{R}.$

(b) En déduire l'angle entre (OK) et (AK) .

D'après le rappel, l'angle entre les vecteurs \overrightarrow{AK} et \overrightarrow{OK} est l'argument de $\frac{k-a}{k}$. Puisque ce complexe est imaginaire pur, de partie imaginaire négative, son argument vaut $-\pi/2$. Les droites (OK) et (AK) sont donc perpendiculaires.

(c) Préciser la nature du quadrilatère $OQAK$.

Comme $ABQK$ est un parallélogramme : $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{QB}$. Mais Q est le milieu de $[OB]$, donc : $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{OQ}$. Ainsi $OQKA$ est un parallélogramme avec un angle droit. Il s'agit donc d'un rectangle.

On pose $c = \frac{2a}{3}$ et on note C l'image de c .

6. Ecrire $\frac{k-b}{k-c}$ sous forme algébrique. Que peut-on en déduire pour les points B , C et K ?

On a : $c = \frac{10 - i2\sqrt{3}}{3}$, puis : $\frac{k-b}{k-c} = 3 \in \mathbb{R}$. L'angle entre \overrightarrow{BK} et \overrightarrow{CK} vaut donc l'argument de 3, c'est à dire 0. Les points sont donc alignés.

Exercice 5

Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on pose : $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos(t)} dt.$

1. Montrer que f est bien définie et est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\cos(t)}$ est définie et continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.

D'après le TFCl, la fonction $f: x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\cos(t)} dt$ est définie et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2. (a) Calculer la dérivée de f .

D'après le TFCl, f est la primitive de $t \mapsto \frac{1}{\cos(t)}$ qui s'annule en 0, donc

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad f'(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

(b) En déduire le sens de variation de f .

Pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[: f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

3. En effectuant le changement de variable $s = -t$ dans l'intégrale définissant $f(x)$, pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, déterminer la parité de f .

Pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[: \int_0^{-x} \frac{1}{\cos(t)} dt \stackrel{s=-t}{=} \int_0^x \frac{1}{\cos(-s)} (-ds)$, donc $f(-x) = -f(x)$, et f est impaire.

4. (a) Montrer que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[: \cos(t) \leq \frac{\pi}{2} - t$.

La fonction $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t - \cos(t)$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, de dérivée $t \mapsto -1 + \sin(t)$. L'inégalité se déduit du tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\phi'(x)$		-
ϕ	$\frac{\pi}{2} - 1$	0
$\phi(x)$		+

(b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$.

Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[: \cos(t) > 0$, donc par passage à l'inverse : $\frac{1}{\cos(t)} \geq \frac{1}{\frac{\pi}{2} - t}$.

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{1}{\cos(t)} dt \geq \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - t} dt = \left[-\ln\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \right]_{t=0}^{t=\frac{x}{2}} = \ln \frac{\pi}{2} - \ln \frac{\pi - x}{2}.$$

Par composition : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} +\infty$.

5. Montrer que f réalise une bijection de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ sur \mathbb{R} .

La fonction f est strictement croissante donc réalise une bijection de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ sur son image.

Comme elle est continue, son image est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Mais : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$, donc par imparité de f : $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$.

Donc l'image de f est \mathbb{R} .

On appelle $g: \mathbb{R} \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ la réciproque de f . On rappelle que : $\forall y \in \mathbb{R}, f(g(y)) = y$.

6. (a) Calculer $g(0)$.

On a : $f(0) = 0$, donc $g(0) = 0$.

(b) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R} : g'(y) = \cos(g(y))$.

En dérivant la relation $f(g(y)) = y$, il vient : $g'(y) \times f'(g(y)) = 1$, c'est-à-dire : $g'(y) \times \frac{1}{\cos(g(y))} = 1$, d'où le résultat.

(c) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R} : 2g''(y) + \sin(2g(y)) = 0$.

En dérivant la relation précédente et appliquant la formule trigonométrique $\sin(2z) = 2 \cos(z) \sin(z)$, il vient :

$$g''(y) = -g'(y) \sin(g(y)) = -\cos(g(y)) \sin(g(y)) = -\frac{\sin(2g(y))}{2},$$

donc : $2g''(y) + \sin(2g(y)) = 0$.

Exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{n} - x - 1$ définie sur \mathbb{R}_- .

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est strictement décroissante sur son ensemble de définition.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable, et sa dérivée vaut $x \mapsto \frac{e^x}{n} - 1$.

L'ensemble de définition de f étant \mathbb{R}_- , $x < 0$ et donc : $\frac{e^x}{n} \leq \frac{e^0}{n} = \frac{1}{n}$, d'où : $f'_n(x) \leq \frac{1}{n} - 1 < 0$, donc f_n est strictement décroissante.

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [-1, 0]$, possède une unique solution pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction f_n est strictement décroissante, donc l'équation possède au plus une solution.

Or f_n est continue, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, son image est un intervalle. Mais : $f_n(0) = -1 + \frac{1}{n} < 0 < \frac{e^{-1}}{n} = f_n(-1)$, donc 0 possède au moins un antécédent par f_n dans $[-1, 0]$.

Conclusion : l'équation possède une unique solution.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n la solution de l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [-1, 0]$.

3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante. *Indication : vous pourrez comparer $f_n(u_n)$ et $f_n(u_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $u_{n+1} + 1 = \frac{e^{u_{n+1}}}{n+1}$, donc :

$$f_n(u_{n+1}) = \frac{e^{u_{n+1}}}{n} - u_{n+1} - 1 = \frac{e^{u_{n+1}}}{n} - \frac{e^{u_{n+1}}}{n+1} = \frac{e^{u_{n+1}}}{n(n+1)} > 0 = f_n(u_n).$$

donc par stricte décroissance de f_n : $u_{n+1} < u_n$, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

4. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

Décroissante et minorée, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge d'après le théorème de la limite monotone. Notons ℓ sa limite.

Comme \exp est continue en ℓ , il vient : $e^{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^\ell$, donc par quotient : $\frac{e^{u_n}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$,

donc par somme : $\frac{e^{u_n}}{n} - u_n - 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\ell - 1$.

Or : $\frac{e^{u_n}}{n} - u_n - 1 = 0$, donc par unicité de la limite : $-\ell - 1 = 0$, donc : $\ell = -1$.

5. Montrer que la suite $(n(u_n + 1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

On a : $u_n + 1 = \frac{e^{u_n}}{n}$, donc : $n(u_n + 1) = e^{u_n}$.

Or : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -1$, donc par composition : $n(u_n + 1) = e^{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = n^2 \left(u_n + 1 - \frac{e^{-1}}{n} \right)$.

6. (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \frac{n}{e}(e^{u_n+1} - 1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = n^2 \left(u_n + 1 - \frac{1}{en} \right) = n^2 \left(\frac{e^{u_n}}{n} - \frac{1}{en} \right) = \frac{n}{e}(e^{u_n+1} - 1)$.

(b) Rappeler la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

On a : $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} \exp'(0) = 1$ par définition du taux d'accroissement.

(c) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et calculer la limite.

Ainsi, par composition : $\frac{e^{u_n+1} - 1}{u_n + 1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$, donc par produit :

$$v_n = \frac{n}{e}(e^{u_n+1} - 1) = \frac{n(u_n + 1)}{e} \times \frac{e^{u_n+1} - 1}{u_n + 1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{e} \times 1 = \frac{1}{e^2}.$$

Exercice 7

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x, y) = 2e^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2 \quad \text{et} \quad h(x) = 2e^{-x} + 2x^2.$$

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x, y) \geq h(x)$.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = 2e^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2 = h(x) + x^2 - 2xy + y^2.$$

Or : $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0$, donc $f(x, y) \geq h(x)$.

2. (a) Montrer que l'équation $e^{-x} - 2x = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une unique solution. On la note α dans la suite de l'exercice.

La fonction $x \mapsto e^{-x} - 2x$ est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $x \mapsto -e^{-x} - 2 < 0$.

Donc ϕ est strictement décroissante, et l'équation possède au plus une solution.

Mais : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = -\infty$, et comme ϕ est continue, le TVI assure l'existence d'au moins une solution.

En particulier :

x	α		
$\phi(x)$	-	0	+

(b) Exprimer $h(\alpha)$ sous la forme d'un polynôme en α .

Par définition : $e^{-\alpha} = 2\alpha$, donc : $h(\alpha) = 2e^{-\alpha} + 2\alpha^2 = 4\alpha + 2\alpha^2$.

(c) Étudier les variations de h .

La fonction h est dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h'(x) = -2e^{-x} + 4x = -2\phi(x)$.

On déduit :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
h	$+\infty$	$4\alpha + 2\alpha^2$	$+\infty$

3. En déduire que f admet un minimum sur \mathbb{R}^2 . Vous exprimerez ce minimum en fonction de α .

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x, y) \geq h(x) \geq h(\alpha) = 4\alpha + 2\alpha^2$, donc $4\alpha + 2\alpha^2$ minore f .

Mais : $f(\alpha, \alpha) = h(\alpha) = 4\alpha + 2\alpha^2$, donc $4\alpha + 2\alpha^2$ est le minimum de f .

AVRIL 2026

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES CYCLE LONG /
ANALYSTES STATISTICIENS

ISE Cycle long / AS

CORRIGÉ de la 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est constituée de six exercices indépendants à traiter dans un ordre quelconque.
Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Exercice 1

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x),$$

tandis que $f(0) = 0$.

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (5x^2 + 2x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln(x)) = 0$ (par croissance comparée) d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 \ln(x)) = 0$ et par différence $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

Pour $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} = 5x + 2 - 2x \ln(x)$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x)) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 2$. La limite en 0 du taux d'accroissement de f en 0 existe et est finie donc f est dérivable à droite en 0.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

$f(x) = 2x^2 \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{x} - \ln(x) \right)$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(x) = -\infty$. Ainsi, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{x} - \ln(x) \right) = -\infty$. Enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

3. Dresser le tableau de variations complet de la dérivée f' sur $]0 ; +\infty[$.

f est définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = 10x + 2 - (4x \ln(x) + 2x^2 \times \frac{1}{x})$ soit $f'(x) = 8x + 2 - 4x \ln(x)$ et $f'(0) = 2$.

f' est définie sur $]0 ; +\infty[$ et dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Pour tout $x > 0$, $f''(x) = 8 - (4 \ln(x) + 4x \times \frac{1}{x})$ soit $f''(x) = 4 - 4 \ln(x)$.

$f''(x) = 0$ équivaut à $4 - 4 \ln(x) = 0$ soit $\ln(x) = 1$ ou encore $x = e$.

$f''(x) < 0$ équivaut à $\ln(x) > 1$ soit $x > e$ et $f''(x) > 0$ équivaut à $\ln(x) < 1$ soit $0 < x < e$.

Enfin $f'(e) = 4e + 2$ et comme $f'(x) = x(8 + \frac{2}{x} - 4 \ln(x))$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$.

On en déduit le tableau de variations de f' :

x	0	e	$+\infty$
$f''(x)$		+	0 -
f'		$4e + 2$	$-\infty$
	2		

4. Calculer, en unité d'aire, l'aire de la portion du plan comprise entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

Si $f(x) > 0$ sur $[1, e]$, l'aire décrite est $\int_1^e f(x) dx$. Or d'après 3., f' est strictement croissante sur $]0, e]$ avec $f'(0) = 2$ donc $f' > 0$ sur $]0, e]$ et donc sur $[1, e]$.

On en déduit que f est strictement croissante sur $[1, e]$. Et comme $f(1) = 5 \times 1^2 + 2 \times 1 - 2 \times 1^2 \times \ln(1) = 7 > 0$ alors $f(x) > 0$ sur $[1, e]$.

Calculons $\int_1^e f(x) dx$:

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e (5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)) dx = \int_1^e (5x^2 + 2x) dx - \int_1^e (2x^2 \ln(x)) dx.$$

On effectue une intégration par partie sur la deuxième intégrale :

$$\begin{aligned} \int_1^e f(x) dx &= \left[\frac{5}{3}x^3 + x^2 \right]_1^e - \left[\frac{2}{3}x^3 \ln(x) \right]_1^e + \int_1^e \frac{2}{3}x^2 dx \\ &= \frac{5}{3}e^3 + e^2 - \frac{5}{3} - 1 - \frac{2}{3}e^3 + \left[\frac{2}{9}x^3 \right]_1^e \\ &= e^3 + e^2 - \frac{8}{3} + \frac{2}{9}e^3 - \frac{2}{9} \\ &= \frac{11}{9}e^3 + e^2 - \frac{26}{9}. \end{aligned}$$

L'aire de la portion du plan comprise entre \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$ est égale à $\frac{11}{9}e^3 + e^2 - \frac{26}{9}$ unités d'aire.

5. Démontrer que le maximum de f , atteint en un réel α positif, est égal à $\alpha^2 + \alpha$.

La fonction dérivée f' est dérivable donc continue sur $]0 ; +\infty[$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2 = f'(0)$, f' est même continue sur $]0 ; +\infty[$.

Elle est de plus strictement monotone sur $[e; +\infty[$ avec $f'(e) > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) < 0$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f'(x) = 0$ admet, sur $[e; +\infty[$, une unique solution que l'on notera α .

On en déduit que $f'(x) > 0$ sur $[e; \alpha[$ et $f'(x) < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$. Par ailleurs, f' est strictement croissante sur $[0; e]$ avec $f'(0) > 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $[0; e]$.

Ainsi, f' est nulle en α , strictement positive sur $[0; \alpha[$ et strictement négative sur $]\alpha; +\infty[$: la fonction f atteint donc en α son maximum égal à $f(\alpha)$.

On a d'une part $f(\alpha) = 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 \ln(\alpha)$ et d'autre part $f'(\alpha) = 0$ ce qui équivaut à $8\alpha + 2 - 4\alpha \ln(\alpha) = 0$ soit $2\alpha \ln(\alpha) = 4\alpha + 1$. Ainsi $f(\alpha) = 5\alpha^2 + 2\alpha - \alpha(4\alpha + 1) = 5\alpha^2 + 2\alpha - 4\alpha^2 - \alpha$ de telle sorte que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.

Exercice 2

On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

1. a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x de $[0; \frac{1}{2}]$,

$$g(x) = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}.$$

$$g(x) = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} = \frac{a(1+x) + b(1-x)}{1-x^2} = \frac{a+b+x(a-b)}{1-x^2}.$$

Donc par identification, on a $a+b=1$ et $a-b=0$ soit $a=b=\frac{1}{2}$ et pour tout réel x de $[0; \frac{1}{2}]$, $g(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$.

- b) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) dt$.

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \frac{1}{2} [-\ln(1-t) + \ln(1+t)]_0^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi $I = \frac{1}{2} (\ln 2 + \ln \frac{3}{2})$ d'où $I = \frac{1}{2} \ln 3$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\cos(\theta)}$.

La fonction h définie par $h(\theta) = \sin(\theta)$ étant définie, dérivable sur $[0; \frac{\pi}{6}]$ et à valeurs dans $[0; \frac{1}{2}]$, on effectue le changement de variable : $x = \sin(\theta)$, ainsi $dx = \cos(\theta)d\theta$ et

$$\frac{dx}{1-x^2} = \frac{\cos(\theta)d\theta}{1-\sin^2(\theta)} = \frac{d\theta}{\cos(\theta)}.$$

De plus si $\theta = 0$ alors $x = 0$ et si $\theta = \frac{\pi}{6}$ alors $x = \frac{1}{2}$. Donc $J = I = \frac{1}{2} \ln 3$.

Exercice 3

Une personne, fumeuse, effrayée par des statistiques alarmantes sur les risques de cancer, consulte des études parues sur la capacité d'un fumeur à cesser définitivement la cigarette. Pour n entier naturel non nul, on note F_n l'événement : « la personne fume le $n^{\text{ème}}$ jour » et p_n la probabilité de F_n . On a, en particulier, $p_1 = 1$. On estime que :

- Si la personne a fumé le $n^{\text{ème}}$ jour, alors la probabilité qu'elle ne fume pas le jour suivant est 0,9.
- Si la personne n'a pas fumé le $n^{\text{ème}}$ jour, alors la probabilité qu'elle ne fume pas le jour suivant est 0,3.

1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n , pour tout n entier naturel non nul.

$p_{n+1} = P(F_{n+1})$ et $p_n = P(F_n)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(F_{n+1}) &= P(F_{n+1} \cap F_n) + P(F_{n+1} \cap \overline{F_n}) \\ &= P_{F_n}(F_{n+1}) \times P(F_n) + P_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) \times P(\overline{F_n}). \end{aligned}$$

D'après l'énoncé, $P_{F_n}(\overline{F_{n+1}}) = 0,9$ donc $P_{F_n}(F_{n+1}) = 0,1$, et $P_{\overline{F_n}}(\overline{F_{n+1}}) = 0,3$ donc $P_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) = 0,7$. Donc $P(F_{n+1}) = 0,1 \times P(F_n) + 0,7 \times (1 - P(F_n))$, et ainsi, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = -0,6p_n + 0,7$.

2. En étudiant la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $U_n = p_n - \frac{7}{16}$, montrer que la suite (p_n) ne tend pas vers 0.

Pour tout n entier naturel non nul, d'après la relation précédente,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{7}{16} \\ &= -0,6p_n + 0,7 - \frac{7}{16} \\ &= -0,6 \left(U_n + \frac{7}{16} \right) + \frac{21}{80} \\ &= -0,6 U_n \end{aligned}$$

donc la suite (U_n) est géométrique de raison $-0,6$ et de premier terme $U_1 = p_1 - \frac{7}{16} = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$. Pour tout n entier naturel non nul, on a donc $U_n = \frac{9}{16} \times (-0,6)^{n-1}$ et $p_n = \frac{9}{16} \times (-0,6)^{n-1} + \frac{7}{16}$. Comme $|-0,6| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,6)^{n-1} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{7}{16}$ est différente de 0.

Exercice 4

Dans un élevage de grande ampleur, 5% des animaux contractent une maladie. Un échantillon de n animaux ($n \geq 20$) pris au hasard est assimilé à un tirage avec remise et est soumis à un test de dépistage. Pour cela, on prélève le sang de chacun des n animaux de l'échantillon. Ensuite on analyse les prélèvements sanguins selon deux méthodes possibles :

Méthode 1 : On effectue une analyse individuelle des n prélèvements de l'échantillon, ce qui représente n analyses.

Méthode 2 : On analyse le mélange des n prélèvements de l'échantillon : si le test est négatif à cette maladie, on en déduit que tous les prélèvements sont négatifs; si le test est positif à cette maladie, on effectue alors une analyse sanguine individuelle des n animaux de l'échantillon pour déterminer précisément lesquels sont positifs à la maladie.

On voudrait connaître, en fonction de la taille n de l'échantillon, la méthode la plus économique, c'est-à-dire, celle qui, en moyenne, nécessite le moins d'analyses.

1. On note X_n la variable aléatoire qui donne, pour un échantillon de taille n , le nombre d'analyses effectuées avec la Méthode 2.
 - a) Préciser les valeurs prises par X_n . Justifier brièvement.

Les valeurs prises par X_n sont 1 et $n + 1$: pour un échantillon donné, soit le test est négatif et une seule analyse a été effectuée, soit le test est positif et dans ce cas, en plus de cette analyse groupée, on effectue n analyses individuelles supplémentaires.

- b) Exprimer, en fonction de n , le nombre moyen d'analyses effectuées pour un échantillon de n animaux avec cette deuxième méthode.

Le nombre moyen d'analyses effectuées pour un échantillon de n animaux est l'espérance mathématique de X_n :

$$E(X_n) = 1 \times P(X_n = 1) + (n + 1) \times P(X_n = n + 1).$$

Or $P(X_n = 1) = (0,95)^n$ et $P(X_n = n + 1) = 1 - (0,95)^n$, d'où

$$E(X_n) = (0,95)^n + (n + 1) \times (1 - (0,95)^n) = n + 1 - n \times (0,95)^n.$$

2. Montrer que la Méthode 2 est la plus économique pour les valeurs de n solutions de l'inéquation $n \ln(0,95) + \ln(n) > 0$.

La Méthode 2 est la plus économique si et seulement si elle propose, en moyenne, moins d'analyses que la Méthode 1, c'est à dire si et seulement si $E(X_n) < n$. Cela équivaut à $n + 1 - n \times 0,95^n < n$, soit $n \times 0,95^n > 1$ ou encore $0,95^n > \frac{1}{n} > 0$. La fonction \ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ donc cette dernière inégalité est équivalente à $\ln(0,95^n) > \ln\left(\frac{1}{n}\right)$, soit $n \ln(0,95) > -\ln(n)$, ou encore $n \ln(0,95) + \ln(n) > 0$.

3. On considère la fonction f définie sur $[20 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(0,95) + \ln(x)$. On admet que cette fonction est continue et strictement décroissante sur $[20 ; +\infty[$ et qu'elle s'annule en un réel compris entre les entiers 87 et 88. En déduire quelle sera la méthode la plus économique selon toutes les valeurs $n \geq 20$ possibles de tailles d'échantillon.

Ces données permettent d'affirmer que f est strictement positive sur $[20; 87]$ et strictement négative sur $[88; +\infty[$. On en déduit que pour un échantillon de taille comprise entre 20 et 87 animaux, la méthode 2 est la plus économique et que pour un échantillon de taille supérieure ou égale à 88, c'est la méthode 1.

Exercice 5

On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $e^z = z_0$.

On a

$$\begin{aligned}e^z = z_0 &\Leftrightarrow e^z = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{\ln 2} e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{\ln 2 + i\frac{\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow z = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $e^z = z_0$ est $S = \{\ln 2 + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Déterminer tous les entiers naturels n tels que z_0^n soit un réel positif.

$$z_0^n = (1 + i\sqrt{3})^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}} = 2^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right).$$

Donc $z_0^n \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \geq 0$ et $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$. Or

$$\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 3k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour $n = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$, on a $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \cos(k\pi)$, or $\cos(k\pi) \geq 0$ pour k pair.

Ainsi z_0^n est un réel positif pour tous les entiers $n = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ pair, soit tous les multiples positifs de 6.

Exercice 6

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Or, pour tout entier naturel n , $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ donc $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n}$. Donc pour tout entier naturel n non nul, $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$, soit $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

2. En déduire le comportement de la suite (V_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

$$V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

D'après la question précédente, on a $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, pour tout entier naturel n non nul, donc on peut minorer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ par $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{1})$ et ainsi $2(\sqrt{n+1} - 1) \leq V_n$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2(\sqrt{n+1} - 1) = +\infty$, on déduit, par comparaison, que la suite (V_n) est divergente vers $+\infty$.