

AVRIL 2026

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ de la 1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve est composée de deux exercices et d'un problème, indépendants, à traiter dans un ordre quelconque. Le problème comporte quatre parties qu'il est recommandé d'aborder dans l'ordre proposé.

Exercice 1

On considère un insecte se déposant à chaque seconde sur l'un des trois sommets A , B et C d'un triangle suivant le procédé décrit ainsi :

- si l'insecte se trouve en B , il y reste ;
- si l'insecte se trouve en A , il se retrouve à la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable ;
- si l'insecte se trouve en C , à la seconde suivante, il y reste une fois sur trois et il va en B sept fois plus souvent qu'en A .

A la première seconde, l'insecte se pose de façon équiprobable sur l'un des trois sommets.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement : « à la n -ième seconde, l'insecte se trouve en A (respectivement B et C) », et on note a_n , b_n et c_n les probabilités respectives de A_n , B_n et C_n .

Rappel de notation : Pour A un événement de probabilité non nulle, $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B | A)$ désigne la probabilité conditionnelle de B sachant A .

1. Que valent a_1 , b_1 et c_1 ?

L'insecte se déplace complètement au hasard la première seconde (équiprobabilité) donc on a directement : $a_1 = b_1 = c_1 = \frac{1}{3}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que valent $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$, $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})$? Justifier.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les données fournies par l'énoncé, on a :

- Si l'insecte est en B , il y reste donc il ne peut pas aller vers A dans ce cas d'où $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = 0$.
- Si l'insecte est en A , il va sur l'un des trois sommets de façon équiprobable donc il ira vers A dans ce cas avec une probabilité $\frac{1}{3}$ d'où $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$.
- Enfin, si l'insecte est en C , il y reste avec une probabilité $\frac{1}{3}$ et sinon il se dirige vers B sept fois plus souvent que vers A , i.e $\mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) = 7 \times \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})$.

Or, la famille $\{A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}\}$ est un système complet d'événements donc on a :

$$\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = 1, \text{ d'où : } \frac{1}{3} + 8\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = 1, \text{ i.e. } \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{12}.$$

$$\text{On en déduit également que } \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{7}{12}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par suite, en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{A_n, B_n, C_n\}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) \times \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) \times \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) \times \mathbb{P}(C_n),$$

i.e. $a_{n+1} = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) \times a_n + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) \times b_n + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) \times c_n$. En utilisant la question 2., il vient :

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{12}c_n.$$

De façon analogue, on peut exprimer b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n . On trouve (résultats admis) : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + b_n + \frac{7}{12}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n$.

4. On considère les suites $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}c_n \text{ et } e_n = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{4}c_n.$$

(a) Montrer que les suites $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux suites géométriques de raison respective $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{6}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les relations précédentes, on a :

$$d_{n+1} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{4}c_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{12}c_n \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \right) = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{8}c_n = \frac{1}{2}d_n.$$

Par conséquent, la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme

$$d_1 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}c_1 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{De même, on a : } e_{n+1} = \frac{1}{2}a_{n+1} - \frac{1}{4}c_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{12}c_n \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \right) =$$

$$\frac{1}{12}a_n - \frac{1}{24}c_n = \frac{1}{6}e_n.$$

Ainsi, la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $e_1 = \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{4}c_1 = \frac{1}{12}$.

(b) En déduire l'expression de d_n et de e_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

On déduit directement de 4(a) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} d_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } e_n = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} e_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n$ et $a_n = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n \right]$.

On déduit de la définition des suites $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = d_n + e_n$ et $c_n = 2(d_n - e_n)$. En remplaçant alors d_n et e_n par leur expression en fonction de n trouvée en 4(b), on obtient bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n$ et $a_n = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n \right]$.

5. En déduire alors b_n en fonction de n .

La famille $\{A_n, B_n, C_n\}$ formant un système complet d'événements, on a la relation $a_n + b_n + c_n = 1$ d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 1 - a_n - c_n = 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n \right] - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n \right]$, i.e $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^n$.

6. Étudier la convergence des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et $-1 < \frac{1}{6} < 1$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$.

Grâce aux formules obtenues en 4(c) et 5., on en déduit in fine les limites suivantes :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1$. Cela est conforme à l'intuition puisque le sommet B est « absorbant ».

Exercice 2

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par :

$$y' - \frac{2}{x}y = x \quad (E).$$

1. Déterminer la solution générale sur I de l'équation différentielle homogène associée (E_0) : $y' - \frac{2}{x}y = 0$.

L'équation (E) est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 à coefficient et second membre continus sur I , résolue en y' . D'après le cours, la solution générale sur I de l'équation différentielle homogène associée (E_0) est donnée par : $y_h : x \mapsto \lambda e^{2 \ln(x)} = \lambda x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer une solution particulière de (E) sur I .

On peut utiliser par exemple la méthode de variation de la constante. On cherche alors une solution particulière de (E) de la forme $y_p : x \mapsto \lambda(x) x^2$ avec λ une fonction dérivable sur I . Il vient :

y_p est solution sur I de $(E) \iff \forall x \in I, y_p'(x) - \frac{2}{x}y_p(x) = x \iff \forall x \in I, \lambda'(x)x^2 + 2x\lambda(x) - \frac{2}{x} \times \lambda(x)x^2 = x \iff \forall x \in I, \lambda'(x) = \frac{1}{x}$. Par suite, $\forall x \in I, \lambda(x) = \ln(x)$ convient. On en déduit que $y_p : x \mapsto x^2 \ln(x)$ est une solution particulière de (E) sur I .

3. En déduire la solution générale sur I de l'équation différentielle (E) .

D'après le cours, on sait que la solution générale sur I de l'équation différentielle (E) est la somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée (E_0) et d'une solution particulière de (E) . Par conséquent, la solution générale sur I de l'équation différentielle (E) est donnée par :

$y : x \mapsto \lambda x^2 + x^2 \ln(x)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(1) = 0$.

Il s'agit de trouver l'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} \forall x \in I, y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = x \\ y(1) = 0 \end{cases}$.

D'après 3., on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que, $\forall x \in I, y(x) = \lambda x^2 + x^2 \ln(x)$. De plus, $y(1) = 0$ d'où $\lambda = 0$. Ainsi, l'unique solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(1) = 0$ est la fonction $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$.

Problème

Soit a et b deux entiers naturels. On considère la famille de fonctions $f_{a,b}$ définies sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f_{a,b}(x) = x^a (\ln(x))^b,$$

où \ln désigne comme d'habitude la fonction logarithme népérien. On pose également (sous réserve d'existence) :

$$I_{a,b} = \int_0^1 f_{a,b}(x) dx.$$

On rappelle que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \ln(x) dx$ est convergente de valeur -1 .

Partie I

On commence par étudier dans cette partie les cas particuliers lorsque $a = 0$ ou $b = 0$.

1. On suppose ici que $a = 0$ et $b \in \mathbb{N}$.

(a) Donner $I_{0,0}$ et $I_{0,1}$.

On a directement : $I_{0,0} = \int_0^1 1 dx = 1$ et $I_{0,1} = \int_0^1 \ln(x) dx = -1$ d'après le rappel.

(b) On fixe $b \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que $I_{0,b-1}$ converge. À l'aide une intégration par parties, montrer que : $I_{0,b} = -bI_{0,b-1}$.

On fixe $b \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\varepsilon \in]0, 1[$.

On effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{cases} u'(x) = 1, & u(x) = x, \\ v(x) = \ln^b(x), & v'(x) = \frac{b}{x} \ln^{b-1}(x), \end{cases}$$

ce qui est licite car u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[\varepsilon, 1]$. Il vient :

$$\int_{\varepsilon}^1 \ln^b(x) dx = \left[x \ln^b(x) \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 b \ln^{b-1}(x) dx = -\varepsilon \ln^b(\varepsilon) - b \int_{\varepsilon}^1 \ln^{b-1}(x) dx.$$

Par croissances comparées, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \ln^b(\varepsilon) = 0$, et l'intégrale généralisée $I_{0,b-1}$ étant convergente par hypothèse, on obtient par passage à la limite lorsque ε tend vers 0^+ : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \ln^b(x) dx =$

$$-bI_{0,b-1}. \text{ Ainsi, } I_{0,b} \text{ converge et } I_{0,b} = -bI_{0,b-1}.$$

(c) En déduire que : $\forall b \in \mathbb{N}^*, I_{0,b}$ converge et $I_{0,b} = (-1)^b b!$.

Montrons par récurrence sur $b \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(b)$: « $I_{0,b}$ converge et $I_{0,b} = (-1)^b b!$ ».

- (Initialisation) Pour $b = 1$, on sait d'après 1(a) que $I_{0,1}$ converge et que $I_{0,1} = -1 = (-1)^1 1!$ de sorte que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- (Hérédité) Supposons la propriété $\mathcal{P}(b)$ vraie pour un certain rang $b \in \mathbb{N}^*$ et montrons alors que la propriété $\mathcal{P}(b+1)$ est encore vraie. Par hypothèse de récurrence, $I_{0,b}$ converge donc on déduit directement de 1(b) que $I_{0,b+1}$ converge aussi. De plus, toujours d'après 1(b), on a : $I_{0,b+1} = -(b+1)I_{0,b}$. Or, par hypothèse de récurrence, $I_{0,b} = (-1)^b b!$ donc on obtient : $I_{0,b+1} = -(b+1) \times (-1)^b b! = (-1)^{b+1} (b+1)!$ de sorte que $\mathcal{P}(b+1)$ est vraie.
- (Conclusion) Par le principe de récurrence, on a montré que : $\forall b \in \mathbb{N}^*, I_{0,b}$ converge et $I_{0,b} = (-1)^b b!$.

2. On suppose ici que $b = 0$ et $a \in \mathbb{N}^*$. Calculer $I_{a,0}$.

La fonction $x \mapsto x^a$ est continue sur $[0, 1]$ donc $I_{a,0}$ existe. On a par ailleurs : $I_{a,0} = \int_0^1 x^a dx =$

$$\left[\frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_0^1 = \frac{1}{a+1}.$$

Partie II

On suppose dans cette partie que $a = 2$ et $b = 1$.

1. Étudier la continuité de la fonction $f_{2,1}$ sur $]0, +\infty[$.

On a : $\forall x \in]0, +\infty[, f_{2,1}(x) = x^2 \ln(x)$. En tant que produit de deux fonctions de référence continues sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $f_{2,1}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

2. (a) Montrer que $f_{2,1}$ est prolongeable par continuité en 0.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = 0$ (limite finie) donc $f_{2,1}$ est prolongeable par continuité en 0.

On note encore $f_{2,1}$ ce prolongement de sorte que l'on a : $f_{2,1}(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x \in]0, +\infty[, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(b) En déduire la nature de l'intégrale généralisée $I_{2,1}$?

On en déduit que l'intégrale généralisée $I_{2,1}$ est convergente en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

3. Calculer $I_{2,1}$.

On pose $\varepsilon \in]0, 1[$.

On effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{cases} u'(x) = x^2, & u(x) = \frac{x^3}{3}, \\ v(x) = \ln(x), & v'(x) = \frac{1}{x}, \end{cases}$$

qui est licite car u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[\varepsilon, 1]$. Il vient :

$$\int_{\varepsilon}^1 x^2 \ln(x) dx = \left[\frac{x^3 \ln(x)}{3} \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{x^2}{3} dx = -\frac{\varepsilon^3 \ln(\varepsilon)}{3} - \frac{1}{3} \int_{\varepsilon}^1 x^2 dx = -\frac{\varepsilon^3 \ln(\varepsilon)}{3} - \frac{1}{9} + \frac{\varepsilon^3}{9}.$$

Par croissances comparées, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^3 \ln(\varepsilon) = 0$ et l'intégrale généralisée $I_{2,1}$ étant convergente,

il vient par passage à la limite lorsque ε tend vers 0^+ : $I_{2,1} = -\frac{1}{9}$.

4. Montrer que $f_{2,1}$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'_{2,1}$ et $f''_{2,1}$ sur $]0, +\infty[$.

En tant que produit de deux fonctions de référence deux fois dérivables sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $f_{2,1}$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus, on a : $\forall x > 0, f'_{2,1}(x) = 2x \ln(x) + x$ et $f''_{2,1}(x) = 2 \ln(x) + 3$.

5. Montrer que $f_{2,1}$ est dérivable en 0^+ .

On a : $\forall x > 0, \frac{f_{2,1}(x) - f_{2,1}(0)}{x - 0} = x \ln(x)$ d'où, par croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_{2,1}(x) - f_{2,1}(0)}{x - 0} = 0.$$

On en déduit que $f_{2,1}$ est dérivable en 0^+ avec $f'_{2,1}(0) = 0$.

6. Étudier les variations de la fonction $f_{2,1}$ sur $[0, +\infty[$.

D'après 4., on a : $\forall x > 0, f'_{2,1}(x) = 2x \ln(x) + x = x(2 \ln(x) + 1)$. On en déduit que : $f'_{2,1}(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = e^{-1/2}$ et que $f'_{2,1}(x) \geq 0 \iff x \geq e^{-1/2}$. Par conséquent, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$e^{-1/2}$	$+\infty$
$f'_{2,1}(x)$	0	-	0
			+
$f_{2,1}$	0	\searrow	\nearrow
			$+\infty$
			$-\frac{e^{-1}}{2}$

7. La fonction $f_{2,1}$ est-elle injective sur $[0, +\infty[$? Justifier.

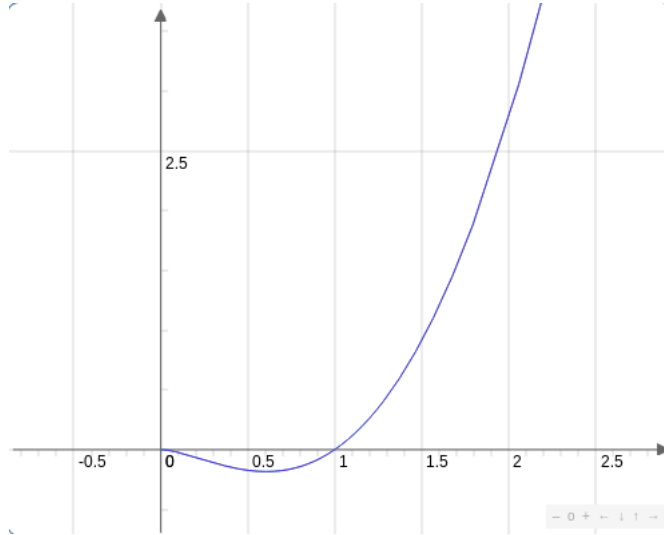
On remarque que $f_{2,1}(0) = 0 = f_{2,1}(1)$ alors que $0 \neq 1$ donc on en déduit que la fonction $f_{2,1}$ n'est pas injective sur $[0, +\infty[$.

8. Étudier la convexité de $f_{2,1}$ sur $]0, +\infty[$.

On étudie le signe de $f_{2,1}''$. D'après 4., on a : $\forall x > 0, f_{2,1}''(x) = 2 \ln(x) + 3$. On en déduit que $f_{2,1}''(x) = 0 \iff x = e^{-3/2}$ et que $f_{2,1}''(x) \geq 0 \iff x \geq e^{-3/2}$. Par conséquent, f est concave sur $]0, e^{-3/2}]$ et convexe sur $[e^{-3/2}, +\infty[$. En particulier, le point de coordonnées $(e^{-3/2}, f_{2,1}(e^{-3/2}))$ est un point d'inflexion pour la courbe représentant $f_{2,1}$.

9. Donner la représentation graphique de $f_{2,1}$.

Donnons la représentation graphique $\mathcal{C}_{2,1}$ de $f_{2,1}$:



Partie III

On suppose dans cette partie que $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la continuité de la fonction $f_{a,b}$ sur $]0, +\infty[$.

En tant que produit de deux fonctions de référence continues sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $f_{a,b}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que $f_{a,b}$ est prolongeable par continuité en 0. On note encore $f_{a,b}$ ce prolongement.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a (\ln(x))^b = 0$ (limite finie) donc $f_{a,b}$ est prolongeable par continuité en 0.

On note encore $f_{a,b}$ ce prolongement de sorte que l'on a : $f_{a,b}(x) = \begin{cases} x^a (\ln(x))^b & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

3. En déduire la nature de l'intégrale généralisée $I_{a,b}$.

On en déduit que l'intégrale généralisée $I_{a,b}$ est convergente (intégrale d'une fonction continue sur un segment).

4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $I_{a,b} = -\frac{b}{a+1} I_{a,b-1}$.

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. On effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{cases} u'(x) = x^a, & u(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1}, \\ v(x) = \ln^b(x), & v'(x) = \frac{b}{x} \ln^{b-1}(x), \end{cases}$$

qui est licite car u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[\varepsilon, 1]$. Il vient :

$$\int_{\varepsilon}^1 x^a \ln^b(x) dx = \left[\frac{x^{a+1} \ln^b(x)}{a+1} \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{bx^a \ln^{b-1}(x)}{a+1} dx = -\frac{\varepsilon^{a+1} \ln^b(\varepsilon)}{a+1} - \frac{b}{a+1} \int_{\varepsilon}^1 x^a \ln^{b-1}(x) dx.$$

Par croissances comparées, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon^{a+1} \ln^b(\varepsilon)}{a+1} = 0$, et les intégrales en jeu étant convergentes,

on obtient par passage à la limite lorsque ε tend vers 0^+ : $I_{a,b} = -\frac{b}{a+1} I_{a,b-1}$.

5. Montrer par récurrence sur $b \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(b)$: $\ll \forall a \in \mathbb{N}^*, I_{a,b} = \frac{(-1)^b b!}{(a+1)^b} I_{a,0} \gg$.

Montrons par récurrence sur $b \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(b)$: $\ll \forall a \in \mathbb{N}^*, I_{a,b} = \frac{(-1)^b b!}{(a+1)^b} I_{a,0} \gg$.

- (Initialisation) Pour $b = 1$, on sait d'après 4. : $\forall a \in \mathbb{N}^*, I_{a,1} = -\frac{1}{a+1} I_{a,0} = \frac{(-1)^1 1!}{(a+1)^1} I_{a,0}$ de sorte que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- (Hérédité) Supposons la propriété $\mathcal{P}(b)$ vraie pour un certain rang $b \in \mathbb{N}^*$ et montrons alors que la propriété $\mathcal{P}(b+1)$ est encore vraie. D'après 4., on a :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, I_{a,b+1} = -\frac{b+1}{a+1} I_{a,b}.$$

Or, par hypothèse de récurrence, $I_{a,b} = \frac{(-1)^b b!}{(a+1)^b} I_{a,0}$ donc on obtient :

$$I_{a,b+1} = -\frac{b+1}{a+1} \times \frac{(-1)^b b!}{(a+1)^b} I_{a,0} = \frac{(-1)^{b+1} (b+1)!}{(a+1)^{b+1}} I_{a,0}$$

de sorte que $\mathcal{P}(b+1)$ est vraie.

- (Conclusion) Par le principe de récurrence, on a montré que : $\forall b \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{N}^*, I_{a,b} = \frac{(-1)^b b!}{(a+1)^b} I_{a,0}$.

6. En déduire la valeur de $I_{a,b}$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$.

D'après la question 2. de la partie 1, on sait que : $\forall a \in \mathbb{N}^*, I_{a,0} = \frac{1}{a+1}$ donc on déduit

directement de 5. que : $\forall b \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{N}^*, I_{a,b} = \frac{(-1)^b b!}{(a+1)^{b+1}}$. La formule restant vraie lorsque

$a = 0$ ou $b = 0$ (cf partie 1), on en déduit finalement que : $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, I_{a,b} = \frac{(-1)^b b!}{(a+1)^{b+1}}$.

Partie IV

On désigne comme d'habitude par e la constante de Néper ($e = \exp(1) \approx 2.718$).

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = I_{n,n} = \int_0^1 x^n (\ln(x))^n dx$ et $v_n = (-e)^n u_n$.

On rappelle que $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

1. À l'aide de la question 6. de la partie III, déterminer u_n en fonction de n .

On déduit directement de la question 6. de la partie III que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = I_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n > 0$.

On déduit de la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-e)^n u_n = \frac{e^n n!}{(n+1)^{n+1}} > 0$.

3. On souhaite étudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$.

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = e^x - x - 1$. Par les théorèmes généraux, h est dérivable sur \mathbb{R} et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = e^x - 1$. Ainsi, $\forall x > 0, h'(x) > 0$ (i.e. h est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^*) et $\forall x < 0, h'(x) < 0$ (i.e. h est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^*). On en déduit le tableau de variations suivant (la limite en $+\infty$ est obtenue par croissances comparées) :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		-	+
h	$+\infty$	\searrow	\nearrow
		0	$+\infty$

En particulier, on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0$, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$.

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, e^{-1} \geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$.

On applique l'inégalité obtenue en 3(a) avec $x = -\frac{1}{n+1}$, ce qui donne

$$e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

$$\text{soit } e^{-1} \geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

(c) Étudier alors la monotonie de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Comme les v_n sont tous strictement positifs, on peut comparer le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ à 1.

Soit donc $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+2)^{n+2}} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n n!} = e \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}.$$

Or, d'après 3(b), on sait que : $\forall k \in \mathbb{N}, e^{-1} \geq \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}$ donc en particulier $e^{-1} \geq \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}$, i.e. $1 \geq e \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}$. Ainsi, $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$ de sorte que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

4. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

D'après 3(c), la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et de plus elle est minorée par 0 donc le théorème de la limite monotone assure que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

5. Déterminer un équivalent de $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On a : $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Or, on sait que $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc il vient : $-\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$. Ainsi, $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$.

6. En admettant la formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, déterminer un équivalent de v_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $v_n = \frac{e^n n!}{(n+1)^{n+1}} > 0$. Grâce à la formule de Stirling, on obtient :

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n \times \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}{(n+1)^{n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n}}{n+1} \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n}}{n} \times e^{n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}.$$

D'après 5., $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$ donc $n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1$ de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -1.$$

Par continuité de la fonction exponentielle en -1 , on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-1} \neq 0$$

de sorte que $e^{n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-1}$. Finalement, on obtient :

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi} e^{-1}}{\sqrt{n}}.$$

7. En déduire la valeur de ℓ et un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2\pi} e^{-1}}{\sqrt{n}} = 0$, on en déduit directement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, i.e. $\ell = 0$.

Par ailleurs, toujours grâce à la question précédente, on obtient directement :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n \sqrt{2\pi}}{e^{n+1} \sqrt{n}}.$$

AVRIL 2026

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

CORRIGÉ de la COMPOSITION D'Économie (sujet1 & sujet2)

Sujet 1

« Industrialisation verte, transition énergétique et transformation structurelle en Afrique : véritable moteur de développement ou nouvelle forme de dépendance économique ? »

Proposition de plan détaillé

Introduction

- **Accroche** : L'Afrique dispose de 30 % des réserves mondiales de minerais critiques utilisés dans les technologies vertes (cobalt, lithium, manganèse), alors que le continent ne représente que 3 % des émissions mondiales.
- **Contexte** : La transition énergétique mondiale crée une nouvelle demande pour ces ressources, tout en exerçant une pression sur les pays africains pour s'industrialiser de manière durable.
- **Problématique** : L'industrialisation verte peut-elle réellement soutenir une transformation structurelle autonome ou risque-t-elle de reproduire les schémas historiques de dépendance ?
- **Annonce du plan** : Analyse des opportunités offertes par l'industrialisation verte, des risques de dépendance et des conditions nécessaires pour qu'elle devienne un moteur de développement.

Partie I : Des opportunités inédites pour une industrialisation verte en Afrique

1. Valorisation des ressources naturelles dans les chaînes de valeur vertes

- Demande mondiale croissante en minerais stratégiques.
- Possibilité de remonter les chaînes de valeur : batteries, panneaux solaires, hydrogène vert.
- Exemple : stratégie batteries en RDC/Zambie, projet Green Hydrogen en Namibie.

2. Transition énergétique comme levier de diversification

- Accès aux énergies renouvelables : solaire, éolien, géothermie.
- Réduction des coûts énergétiques pour les entreprises locales.
- Développement de clusters industriels bas carbone (Maroc, Kenya, Afrique du Sud).

Partie II : Une industrialisation qui peut renforcer la dépendance économique

1. Risque de reprimarisation « verte »

- Exportation brute de minerais vs transformation locale limitée.
- Concurrence entre États africains pour attirer les investisseurs étrangers.

2. Dépendance technologique persistante

- Brevets détenus par les firmes étrangères.
- Verrouillage technologique (USA, UE, Chine).
- Faible capacité locale en R&D → risque de rester des fournisseurs de matières premières.

3. Nouveaux enjeux géopolitiques et financiers

- Greenwashing, pressions environnementales asymétriques.
- Endettement pour financer les infrastructures vertes.

Partie III : Comment faire de l'industrie verte un moteur de transformation structurelle ?

1. Développer les capacités productives locales

- Renforcement du capital humain (ingénierie, chimie, énergies).
- Politiques industrielles actives : subventions, zones industrielles vertes.

2. Construire des chaînes de valeur régionales

- Complémentarités entre pays : Afrique australe (minerais) + Afrique de l'Est (énergie) + Afrique de l'Ouest (marchés).
- Rôle de la ZLECAF dans la standardisation et la coordination industrielle.

3. Renforcer la gouvernance économique

- Transparence dans la gestion des ressources.
- Partenariats équilibrés avec les firmes étrangères (local content, transfert de technologies).
- Financement vert (fonds climatiques, obligations vertes).

Conclusion

- **Synthèse** : L'industrialisation verte constitue une opportunité majeure de transformation structurelle, mais elle comporte des risques élevés de dépendance.
- **Ouverture** : La réussite dépendra d'une gouvernance continentale cohérente et de la capacité à créer une industrie africaine intégrée et technologique.

Guide de notation — Sujet 1 (20 points)

(Calqué sur le format 2025)

1. Compréhension de la problématique – 4 points

- Reformulation claire, identification des enjeux développement/dépendance.

2. Structure et argumentation – 6 points

- Plan clair en 2–3 parties.
- Arguments cohérents et illustrés.

3. Mobilisation du programme – 6 points

- Croissance, développement, globalisation, économie industrielle, politiques industrielles.
- Exemples africains précis.

4. Qualité de l'analyse – 4 points

- Capacité à articuler opportunités et risques.
- Propositions réalistes.

5. Qualité de la rédaction – 4 points

- Clarté, logique, maîtrise du vocabulaire économique.

Répartition des points

- Introduction : 4

- Développement : 10
- Conclusion : 3
- Exemples / références : 3

Sujet 2

« Réformes monétaires, intégration régionale et instabilité macroéconomique en Afrique : la politique monétaire peut-elle réduire durablement les vulnérabilités ? »

Proposition de plan détaillé

Introduction

- **Accroche** : Inflation record en Afrique en 2022–2023 (plus de 20 % dans certains pays), volatilité des changes, resserrement monétaire mondial.
- **Contexte** : Multiples débats sur les réformes monétaires : ECO en Afrique de l’Ouest, monnaies numériques de banque centrale, intégration financière régionale.
- **Problématique** : Les réformes monétaires et l’intégration régionale peuvent-elles réellement stabiliser les économies africaines ?
- **Annonce du plan** : Analyse des sources d’instabilité, des réformes en cours, et des conditions pour une stabilisation durable.

Partie I : Les vulnérabilités macroéconomiques persistantes en Afrique

1. Chocs externes et instabilité des taux de change

- Dépendance aux importations alimentaires et énergétiques.
- Volatilité des matières premières → déséquilibres extérieurs.
- Pression sur les réserves de change.

2. Inflation structurelle et faiblesse des instruments monétaires

- Marchés financiers peu profonds.
- Transmission faible de la politique monétaire.
- Dollarisation partielle dans certains pays africains.

3. Fragmentation monétaire et faible intégration régionale

- Multiplicité de régimes de change.
- Coûts élevés des transactions intra-africaines.

Partie II : Les réformes monétaires et régionales comme réponses potentielles

1. Réformes des régimes de change et projets monétaires régionaux

- Passage à l'ECO en Afrique de l'Ouest : enjeux macro, politiques, institutionnels.
- Courage et limites de l'UEMOA (stabilité mais dépendance externe).

2. Innovation financière et monnaies numériques

- MNBC comme outils de réduction des coûts de transaction.
- Défis de cybersécurité, interopérabilité et inclusion financière.

3. Développement des marchés financiers régionaux

- Intégration des bourses régionales (BRVM, ASEA).
- Amélioration de la profondeur financière → meilleure absorption des chocs.

Partie III : Pour une stabilisation durable : conditions et limites

1. Renforcer l'indépendance et la crédibilité des banques centrales

- Gouvernance, transparence, cadre monétaire clair.
- Coordination avec la politique budgétaire.

2. Développer les capacités productives et réduire la dépendance extérieure

- Diversification sectorielle → amélioration de la balance des paiements.
- Augmentation de la productivité agricole et énergétique.

3. Intégration régionale comme stratégie de résilience

- Harmonisation des politiques monétaires.
- Systèmes régionaux de paiement.
- Chaînes de valeur régionales → réduction des importations.

Conclusion

- **Synthèse** : Les réformes monétaires et l'intégration régionale peuvent renforcer la stabilité, mais elles ne peuvent réussir sans transformation structurelle.
- **Ouverture** : Le rôle futur des monnaies numériques et des systèmes régionaux pourrait redéfinir l'architecture monétaire africaine.

Guide de notation — Sujet 2 (20 points)

(Format identique au corrigé 2025)

1. Compréhension de la problématique – 4 points

- Bonne identification des mécanismes monétaires et des enjeux africains.

2. Structure & argumentation – 6 points

- Plan clair, arguments logiques, progressifs.

3. Mobilisation du programme – 6 points

- Monnaie, régimes de change, balance des paiements, politiques monétaires, globalisation.

4. Qualité de l'analyse – 4 points

- Mise en balance des réformes et de leurs limites.
- Vision réaliste et contextualisée.

5. Rédaction – 4 points

Répartition des points

- Introduction : 4
- Développement : 10
- Conclusion : 3
- Exemples : 3

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2026

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ de la 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est constituée de cinq exercices indépendants à traiter dans un ordre quelconque. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Exercice 1

On considère la fonction de deux variables f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = 5x^2 + 2(y - 1)x + 2(y + 1)y + 1$$

1. Déterminer les dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de f .

La fonction f est polynomiale donc elle admet des dérivées partielles à tout ordre. Pour tout (x, y) de \mathbb{R}^2 on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 10x + 2y - 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 4y + 2$$

2. Dédurre de la question précédente l'unique point critique (x_0, y_0) pour f .

On résout le système donné par l'annulation des deux dérivées partielles d'ordre un en (x, y) .
L'opération $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 5\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ donne

$$-18y - 12 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}$$

et en remplaçant dans $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ on en déduit $x = \frac{1}{3}$. Par conséquent l'unique point critique pour f est le point $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

3. Justifier théoriquement l'égalité $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ et calculer les dérivées partielles secondes de f en (x_0, y_0) .

On a directement $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = 10$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 4$. Par le théorème de Schwarz, comme f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 , on a l'égalité de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ et par le calcul, elles valent 2.

4. Dédurre des questions précédentes la nature locale du point (x_0, y_0) pour f .

Avec les notations de Monge, on a $r = 10$, $s = 2$ et $t = 4$. Donc $rt - s^2 = 36$, ce qui implique que f admet un extremum local en (x_0, y_0) . Comme $r + t > 0$, il s'agit d'un minimum local, valant $f(1/3, -2/3) = 0$.

5. Développer l'expression $F(x, y) = (x - y - 1)^2 + 4(x + \frac{1}{2}y)^2$ et en déduire la nature globale du point (x_0, y_0) pour f .

On trouve en développant $F(x, y) = f(x, y)$ donc f est une somme de deux carrés et est par conséquent minimale quand elle s'annule. On a donc un minimum global en (x_0, y_0) .

Exercice 2

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -12 & -9 \\ 2 & -7 & -6 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2 & 14 & 11 \\ -2 & 8 & 5 \\ 2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les produits $A.B$ et $B.A$.

On a

$$A.B = \begin{pmatrix} -2 & 14 & 11 \\ -2 & 8 & 5 \\ 2 & -6 & -3 \end{pmatrix} = B.A$$

2. Vérifier que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres pour B

en précisant les valeurs propres associées. En déduire que (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Pour vérifier que ce sont des vecteurs propres il suffit de les multiplier par B . On a :

$$B.U = U$$

$$B.V = 2V$$

$$B.W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc U est un vecteur propre pour la valeur propre 1, V est un vecteur propre pour la valeur propre 2 et W pour la valeur propre 0. Comme ce sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, U , V et W forment une famille libre. Comme elle est de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

3. Montrer que si M et N sont deux matrices carrées telles que $M.N = N.M$ et si u est un vecteur propre pour M pour une valeur propre λ , alors Nu est un vecteur propre pour M pour la valeur propre λ .

On a $M.Nu = N.Mu = N.(\lambda u) = \lambda Nu$ donc Nu est un vecteur propre pour M pour la valeur propre λ .

4. Montrer que le spectre de A est $\{1, 2\}$ et que A est diagonalisable.

D'après la question précédente, comme A et B commutent, les vecteurs U , V et W sont tels que $A.U$, $A.V$ et $A.W$ sont encore des vecteurs propres de B pour les mêmes valeurs propres. Or on a trois valeurs propres distinctes donc chacun des espaces propres est de dimension un. Donc $A.U$, $A.V$ et $A.W$ sont des multiples respectifs de U , V et W , et donc U , V et W sont des vecteurs propres pour A . On trouve par le calcul :

$$A.U = U$$

$$A.V = V$$

$$A.W = 2W$$

Comme U, V, W forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on en déduit que le spectre de A est $\{1, 2\}$ avec 1 valeur propre double. La somme des dimensions de ses espaces propres étant 3, la matrice A est bien diagonalisable.

5. Déterminer un polynôme $P(X)$ de degré 2 tel que $P(0) = 2$, $P(1) = 1$ et $P(2) = 1$.

On a par la première condition $P(X) = aX^2 + bX + 2$. En utilisant les deux autres conditions, on a

$$a + b + 2 = 1$$

$$4a + 2b + 2 = 1,$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} a + b &= -1 \\ 4a + 2b &= -1. \end{cases}$$

Avec $L_2 - 4L_1$ on a $b = -\frac{3}{2}$ et on en déduit $a = \frac{1}{2}$ en remplaçant. D'où

$$P(X) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{2}X + 2.$$

6. Montrer sans calculs que $P(B) = A$.

Soit

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la base canonique à la base (U, V, W) . D'après les questions précédentes, on a

$$Q^{-1}.B.Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D_1$$

et

$$Q^{-1}.A.Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D_2.$$

Alors d'après la question précédente

$$P(B) = P(Q.D_1.Q^{-1}) = Q.P(D_1).Q^{-1} = Q.D_2.Q^{-1} = A.$$

Exercice 3

On considère trois urnes indiscernables. La première contient une boule rouge et trois boules noires, la deuxième deux boules rouges et deux boules noires, et la troisième trois boules rouges et une boule noire. On va tirer au sort de manière équitable une des trois urnes puis effectuer deux tirages successifs avec remise dans celle-ci, le but étant d'identifier l'urne tirée au sort.

On note U_1, U_2, U_3 les événements correspondant au fait que l'on effectue les tirages dans la première, deuxième ou troisième urne. On définit des variables aléatoires X_1 et X_2 avec X_i valant 1 si le i -ème tirage avec remise a donné une boule rouge et 0 s'il a donné une boule noire.

1. Donner les probabilités des événements U_1, U_2 et U_3 .

Le tirage au sort étant équitable, ils ont tous les trois la même probabilité. Comme ils forment un système complet d'événements, la somme de leurs probabilités est 1. Donc $P(U_i) = \frac{1}{3}$ pour tout i .

2. Déterminer la loi de X_1 .

On a $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$, donc il s'agit d'une loi de Bernoulli. On utilise le système complet d'événements (U_1, U_2, U_3) . Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1) &= P(U_1)P_{U_1}(X_1 = 1) + P(U_2)P_{U_2}(X_1 = 1) + P(U_3)P_{U_3}(X_1 = 1) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

3. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Comme on effectue des tirages avec remise, $P(X_2 = 1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$. De plus on a, toujours par probabilités totales :

$$\begin{aligned} P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} \right) \\ &= \frac{14}{48} = \frac{7}{24} \end{aligned}$$

donc $P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) \neq P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1))$. Cela montre que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

4. On décide avant l'expérience d'affirmer que l'urne utilisée pour les tirages est la première si X_1 et X_2 valent 0, la deuxième si elles ont deux valeurs différentes et la troisième si elles valent 1. Calculer la probabilité que l'affirmation soit fausse.

Le fait que l'affirmation soit fausse correspond à l'événement :

$$\overline{U_3} \cap (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cup \overline{U_2} \cap (X_1 = 1) \cap (X_2 = 0) \cup \overline{U_2} \cap (X_1 = 0) \cap (X_2 = 1) \cup \overline{U_1} \cap (X_1 = 0) \cap (X_2 = 0).$$

On a :

$$\overline{U_3} \cap (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) = U_2 \cap (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cup U_1 \cap (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1).$$

Cette union est disjointe et par probabilités composées, cet événement a pour probabilité :

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{48}.$$

En procédant de même pour les autres termes, on obtient comme probabilité que l'affirmation soit fausse :

$$\frac{5}{48} + \frac{6}{48} + \frac{6}{48} + \frac{5}{48} = \frac{11}{24}.$$

5. On prend maintenant le problème sous un autre angle, en considérant une urne contenant 4 boules dont r boules rouges et $4-r$ boules noires, où $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ est inconnu. On effectue n tirages avec remise dans cette urne. On note Y_i la variables aléatoire valant 1 si le i -ième tirage dans l'urne a donné une boule rouge, et valant 0 sinon. On pose enfin $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$.

(a) Quelle est la loi de $\sum_{i=1}^n Y_i$?

Pour tout i , Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(Y_i = 1) = r/4$. Les Y_i étant indépendants (car les tirages se font avec remise), leur somme suit une loi binomiale de paramètres n et $r/4$.

(b) En déduire l'espérance et la variance de S_n .

On en déduit que $E(S_n) = \frac{1}{n} \cdot n \frac{r}{4} = \frac{r}{4}$ et $V(S_n) = \frac{1}{n^2} \cdot n \frac{r(4-r)}{16} = \frac{r(4-r)}{16n}$.

(c) Soit $\alpha \in]0, 1[$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner un intervalle de confiance au niveau $1 - \alpha$ pour r , dépendant uniquement de S_n , n et α .

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. La formule de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$P(|S_n - E(S_n)| \geq a) \leq \frac{V(S_n)}{a^2}.$$

En remplaçant $E(S_n)$ et $V(S_n)$ par leur expression, on a donc

$$P(|S_n - r/4| \geq a) \leq \frac{r(4-r)}{16na^2}$$

soit

$$P(|4S_n - r| \geq 4a) \leq \frac{r(4-r)}{16na^2}.$$

Comme $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ on peut majorer $r(4-r)$ par 4. On en déduit :

$$P(|4S_n - r| \geq 4a) \leq \frac{1}{4na^2}.$$

On a :

$$\frac{1}{4na^2} = \alpha \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{4n\alpha}$$

donc on prend $a = \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}$ et on en déduit l'intervalle de confiance pour r au niveau α :

$$IC = \left[4S_n - \frac{2}{\sqrt{n\alpha}}; 4S_n + \frac{2}{\sqrt{n\alpha}} \right].$$

On a effet

$$P(r \notin IC) = P(|4S_n - r| \geq \frac{2}{\sqrt{n\alpha}}) \leq \alpha,$$

soit $P(r \in IC) \geq 1 - \alpha$.

Exercice 4

On souhaite étudier la convergence de la série $\sum u_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}.$$

1. Montrer que la série $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \right)$ est convergente.

On réécrit, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{2n-1}} = \frac{\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n}}{\sqrt{4n^2 - 2n}}.$$

Puis on multiplie au numérateur et au dénominateur par $\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n}$, ce qui donne :

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{2n-1}} = \frac{-1}{(\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n})\sqrt{4n^2 - 2n}}.$$

Ce terme équivaut quand n tend vers l'infini à $\frac{-1}{4\sqrt{2n^{3/2}}}$. Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, donc par théorème de comparaison par équivalence, la série $\sum \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ converge.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2k}} - \frac{1}{\sqrt{2k-1}} \right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k}} - \frac{1}{\sqrt{2k-1}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k}} + \sum_{k=1}^n \frac{-1}{\sqrt{2k-1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k}}{\sqrt{2k}} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k-1}}{\sqrt{2k-1}} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

les termes pairs de cette dernière somme constituant la première somme précédente, et les termes impairs la deuxième.

3. Dédurre de la question précédente que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

On note (T_n) la suite des sommes partielles de la série étudiée à la question 1. et (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} S_{2n} &= T_n \\ S_{2n+1} &= T_n - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \end{aligned}$$

La suite (T_n) converge et $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc (S_n) converge et a la même limite que (T_n) . On a donc bien convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

4. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0.

Au voisinage de 0 on a

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2).$$

5. Dédurre des questions précédentes la nature de la série $\sum u_n$.

On écrit pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}.$$

Pour n voisin de l'infini, on a donc :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Or on a vu que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, on sait que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, et une série de terme général de la forme $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge absolument, car la valeur absolue de ce terme équivaut à $\frac{1}{n^{3/2}}$. On a donc montré que $\sum u_n$ diverge comme somme de séries convergentes et d'une série divergente.

Exercice 5

On considère dans cet exercice une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que chacun de ses termes est un entier. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$ on suppose que u_{n+1} est la description de l'écriture de u_n de gauche à droite. Par exemple, si le premier chiffre à gauche de u_{n+1} est 3 et le deuxième 2, cela signifie que u_n commence à gauche par "trois 2" et que s'il y a un autre chiffre après, ce n'est pas un 2. Pour continuer cet exemple, si le troisième chiffre de u_{n+1} est 2 et le quatrième 1, cela signifie que u_n a, après les trois 2, "deux 1", et que s'il y a un chiffre après, ce n'est pas un 1. Ainsi les premiers chiffres en partant de la gauche de u_n sont 22211 ("trois 2 et deux 1"). Dans le cas où $u_0 = 1$, on a donc

$$u_1 = 11$$

$$u_2 = 21$$

$$u_3 = 1211$$

et ainsi de suite.

1. Donner u_4 et u_5 pour le cas où $u_0 = 1$.

On a

$$u_4 = 111221$$

$$u_5 = 312211$$

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n ne peut contenir plus de 3 chiffres identiques à la suite.

Le fait que u_n peut contenir jusqu'à trois chiffres identiques à la suite est visible dans l'exemple de la question précédente. Montrons par l'absurde que u_n ne peut contenir plus de 3 chiffres identiques à la suite. Si c'était le cas, u_n contiendrait au moins 4 chiffres identiques à la suite, disons $cccc$. Si le premier c à gauche est à un rang impair de u_n , cela signifie que u_{n-1} a c chiffres c , suivis de c chiffres c : il y avait donc au moins $2c$ chiffres c à la suite dans u_{n-1} et l'écriture de u_n aurait dû les compter ensemble. Si le premier c est à un rang pair de u_n , cela signifie qu'il y avait un certain nombre de c dans u_{n-1} suivis de c chiffres c , et là aussi tous ces chiffres c auraient dû être comptés ensemble. L'écriture $cccc$ est donc impossible.

3. Démontrer que si u_0 et u_1 ne contiennent que des 1, des 2 et des 3, alors il en est de même pour tous les u_n pour n supérieur ou égal à 2.

On procède par l'absurde. Soit n supérieur ou égal à 2 minimal tel que u_n contienne un chiffre supérieur ou égal à 4, alors, soit u_{n-1} contient un 4, soit u_{n-1} contient au moins

quatre chiffres identiques successifs. Or la première option est impossible car sinon le rang n choisi ne serait pas le rang minimal. Et la seconde option est impossible également d'après la question précédente.

4. Donner un exemple de u_0 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n.$$

On peut prendre $u_0 = 22$. On a une succession de deux chiffres 2 donc $u_1 = 22$, et ainsi de suite pour tout n .

5. Démontrer que l'exemple trouvé à la question précédente est le seul.

Supposons (u_n) constante. On considère le premier chiffre c à gauche de u_n pour un certain n . Pour que u_{n+1} commence par le même chiffre, il faut que c apparaisse c fois au début de u_n . Montrons que seul $c = 2$ est possible.

Le chiffre $c = 0$ est clairement impossible.

On ne peut avoir $c \geq 4$ non plus, car sinon u_n commencerait par 4 chiffres identiques, ce qui est impossible d'après la question 2.

Si $c = 1$, $u_n = 1 \dots$ et donc u_{n+1} commencerait par 11, ce qui signifie que u_n aussi puisqu'ils sont égaux, mais alors u_{n+1} devrait commencer par $c1$ avec $c > 1$, ce qui conduit à une absurdité.

Si $c = 3$, cela signifie que u_n débute par trois 3, donc u_{n+1} aussi, i.e. $u_{n+1} = 333 \dots$. Cela signifie que la succession de trois 3 au début de u_n doit être suivie de trois fois le même chiffre, d , différent de 3, i.e., $u_n = 333ddd \dots$. Par égalité, ceci est également la forme de u_{n+1} , ce qui signifie que pour u_n , après les trois d , il y a de nouveau d fois le chiffre d , ce qui est impossible car il aurait fallu les compter tous ensemble.

Au final, seul $c = 2$ est possible. Donc u_n commence par 22. En répétant le raisonnement précédent, le chiffre suivant ne peut être différent de 2, mais cette fois-ci 2 est également impossible. On aboutit donc bien à l'unique solution $u_n = 22$ pour tout n .



FEUILLE DE RÉPONSES
COMPOSITION D'ANGLAIS
Concours ISE Option Mathématiques

Centre d'examen :	CORRECTION
Nom et prénom :	CORRECTION
Date de naissance :	

0	0	0
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	9

← Codez votre numéro de candidat ci-contre

Par exemple, pour le numéro 8, noircir les cases 008 de la façon suivante :
0 dans la première colonne, 0 dans la seconde et 8 dans la troisième.

Attention : les cases doivent être noircies et non simplement cochées.

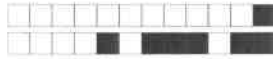
Exemple de case **bien noircie** :

Exemples de cases non ou **mal noircies** :

Pour chaque question, noircir avec soin la bonne réponse. En cas d'erreur, utiliser du blanc correcteur pour effacer complètement la case cochée à tort (ne pas tenter de redessiner la case après effacement).

- QUESTION 01 : a b c d
- QUESTION 02 : a b c d
- QUESTION 03 : a b c d
- QUESTION 04 : a b c d
- QUESTION 05 : a b c d
- QUESTION 06 : a b c d
- QUESTION 07 : a b c d
- QUESTION 08 : a b c d
- QUESTION 09 : a b c d
- QUESTION 10 : a b c d

- QUESTION 11 : a b c d
- QUESTION 12 : a b c d
- QUESTION 13 : a b c d
- QUESTION 14 : a b c d
- QUESTION 15 : a b c d
- QUESTION 16 : a b c d
- QUESTION 17 : a b c d
- QUESTION 18 : a b c d
- QUESTION 19 : a b c d
- QUESTION 20 : a b c d



- QUESTION 21 : a b c d
QUESTION 22 : a b c d
QUESTION 23 : a b c d
QUESTION 24 : a b c d
QUESTION 25 : a b c d
QUESTION 26 : a b c d
QUESTION 27 : a b c d
QUESTION 28 : a b c d
QUESTION 29 : a b c d
QUESTION 30 : a b c d

QUESTION 31 : a b c d
QUESTION 32 : a b c d
QUESTION 33 : a b c d
QUESTION 34 : a b c d
QUESTION 35 : a b c d
QUESTION 36 : a b c d
QUESTION 37 : a b c d
QUESTION 38 : a b c d
QUESTION 39 : a b c d
QUESTION 40 : a b c d

QUESTION 41 : a b c d
QUESTION 42 : a b c d
QUESTION 43 : a b c d
QUESTION 44 : a b c d
QUESTION 45 : a b c d
QUESTION 46 : a b c d
QUESTION 47 : a b c d
QUESTION 48 : a b c d

- QUESTION 49 : a b c d
QUESTION 50 : a b c d

QUESTION 51 : a b c d
QUESTION 52 : a b c d
QUESTION 53 : a b c d
QUESTION 54 : a b c d
QUESTION 55 : a b c d
QUESTION 56 : a b c d
QUESTION 57 : a b c d
QUESTION 58 : a b c d
QUESTION 59 : a b c d
QUESTION 60 : a b c d

QUESTION 61 : a b c d
QUESTION 62 : a b c d
QUESTION 63 : a b c d
QUESTION 64 : a b c d
QUESTION 65 : a b c d
QUESTION 66 : a b c d
QUESTION 67 : a b c d
QUESTION 68 : a b c d
QUESTION 69 : a b c d
QUESTION 70 : a b c d

QUESTION 71 : a b c d
QUESTION 72 : a b c d
QUESTION 73 : a b c d
QUESTION 74 : a b c d
QUESTION 75 : a b c d