ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2026

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

**ISE Option Mathématiques**

**CORRIGÉ de la 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

# 1 Problème d'Analyse

## Introduction

Pour tout réel $x > -1$, on considère la série

$$g(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

On note, pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\zeta(k) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^k},$$

la fonction Zéta de Riemann qui converge pour tout $k \geqslant 2$.

Le but de ce problème est d'étudier la fonction $g$ : domaine de définition, régularité, développement limité en 0 à tout ordre, expression intégrale, comportement aux bornes de son ensemble de définition. Les parties **A**, **B**, **C** et **D** sont indépendantes.

## Partie A — Convergence et premières propriétés de $g$

**A.1.** Montrer que $g$ est définie sur $]-1;+\infty[$.

Pour tout $x > -1$ fixé et tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{(n+x)^2} \leqslant \frac{1}{(n-1)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Or la série $\sum 1/n^2$ est une série de Riemann convergente (car $2 > 1$), donc par les théorèmes d'équivalence et de comparaison terme à terme des série à termes positifs

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n+x)^2}$$

converge. $g$ est donc bien définie sur $]-1;+\infty[$.

**A.2.** Montrer que $g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition et donner, pour tout entier $k$ et tout réel $x > -1$, une expression de $g^{(k)}(x)$ sous la forme d'une série.

Notons, pour tout $x > -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$h_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}.$$

La fonction $h_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et une simple récurrence sur $k$ donne pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in ]-1,+\infty[$,

$$h_n^{(k)}(x) = (-1)^k (k+1)! \, \frac{1}{(n+x)^{k+2}}.$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $x > -1$ et tout entier $n \geqslant 2$,

$$\left| h_n^{(k)}(x) \right| = (k+1)! \, \frac{1}{(n+x)^{k+2}} \leqslant (k+1)! \frac{1}{(n-1)^{k+2}}.$$

Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série de terme général $\left(\frac{1}{(n-1)^{k+2}}\right)_{n \geqslant 2}$ est une série de Riemann convergente (car $k+2 > 1$), on en déduit que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} h_n^{(k)}$ converge normalement et donc uniformément sur $]-1,+\infty[$. Par conséquent, $g$ est $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout entier $k$ et tout réel $x > -1$,

$$g^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k (k+1)! \, \frac{1}{(n+x)^{k+2}}.$$

**A.3.** Soit $m \in \mathbb{N}$. Donner un développement limité de $g$ à l'ordre $m$ en 0. On exprimera les coefficients de ce développement en fonction des valeurs prises par la fonction $\zeta$ définie dans l'introduction.

La fonction $g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$. Donc, pour tout entier naturel $m$, elle admet un développement limité à l'ordre $m$ en 0 :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m} g^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + o(x^m).$$

Or, d'après la question précédente,

$$g^{(k)}(0) = (-1)^k (k+1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+2}} = (-1)^k (k+1)!\, \zeta(k+2).$$

Donc,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k (k+1)!\, \zeta(k+2)\, x^k + o(x^m).$$

## Partie B - Equivalents de $g$ aux bornes de son ensemble de définition.

**B.1.** a) Montrer que, pour tout $x > 0$, pour tout entier strictement positif $k$,

$$\frac{1}{(k+1+x)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{(t+x)^2} \leqslant \frac{1}{(k+x)^2}.$$

Soient $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(t+x)^2}$ est décroissante sur $[k, k+1]$, donc pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{(k+1+x)^2} \leqslant \frac{1}{(t+x)^2} \leqslant \frac{1}{(k+x)^2}.$$

En intégrant entre $k$ et $k+1$, on obtient,

$$\frac{1}{(k+1+x)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{(t+x)^2} \leqslant \frac{1}{(k+x)^2}.$$

b) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{1+x} \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x}.$$

Fixons $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant la relation précédente pour $k$ de 1 à $N$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+1+x)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{N} \int_k^{k+1} \frac{dt}{(t+x)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+x)^2}.$$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{N} \left( \frac{1}{(k+x)^2} \right) + \frac{1}{(N+1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} \leqslant \int_1^{N+1} \frac{dt}{(t+x)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+x)^2}.$$

En faisant tendre $N$ vers l'infini, on obtient,

$$g(x) - \frac{1}{(1+x)^2} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^2} \leqslant g(x).$$

Or,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^2} = \left[ -\frac{1}{t+x} \right]_{t=1}^{+\infty} = \frac{1}{1+x},$$

l'inégalité est donc démontrée.

c) Déterminer un équivalent simple de $g$ en $+\infty$.

En multipliant l'inégalité obtenue dans la question précédente par $x > 0$, on obtient,

$$\frac{x}{1+x} \leqslant xg(x) \leqslant \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{x}{1+x}.$$

Or,

$$\frac{x}{1+x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ et } \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{x}{1+x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Donc par le théorème d'existence des limites par encadrement, $xg(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc,

$$g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

**B.2.** Déterminer un équivalent simple de $g$ en $-1$.

Pour tout $x > -1$, on a,

$$g(x) = \frac{1}{(1+x)^2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

De plus pour $n \geqslant 2$,

$$0 \leqslant \frac{1}{(n+x)^2} \leqslant \frac{1}{(n-1)^2}.$$

En notant $\ell = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ (en fait $\ell = \frac{\pi^2}{6}$), on obtient,

$$0 \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \leqslant \ell.$$

Comme $\frac{1}{(1+x)^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit,

$$g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(1+x)^2}.$$

## Partie C — Une représentation intégrale de $g$.

**C.1.** Montrer que, pour tout réel $\alpha > 0$,

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(-\ln t)\,dt \text{ converge et } \int_0^1 t^{\alpha-1}(-\ln t)\,dt = \frac{1}{\alpha^2}.$$

La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(-\ln t)$ est continue sur $]0,1]$. Soit $X \in ]0,1]$. Par intégration par parties,

$$\int_X^1 t^{\alpha-1}(-\ln t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\left[t^\alpha(-\ln t)\right]_X^1 + \frac{1}{\alpha}\int_X^1 t^\alpha \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{\alpha}X^\alpha \ln X + \frac{1}{\alpha^2}\left[t^\alpha\right]_X^1$$

$$= \frac{1}{\alpha} X^\alpha \ln X + \frac{1}{\alpha^2} (1 - X^\alpha).$$

Or $\alpha > 0$. Donc $X^\alpha \ln X \underset{X \to 0}{\longrightarrow} 0$ et $X^\alpha \underset{X \to 0}{\longrightarrow} 0$ et donc,

$$\int_X^1 t^{\alpha-1}(-\ln t)\, dt \underset{X \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha^2}.$$

Donc $\int_0^1 t^{\alpha-1}(-\ln t)\, dt$ est convergente et

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(-\ln t)\, dt = \frac{1}{\alpha^2}.$$

**C.2.** Montrer que pour tout $x > -1$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 t^{n+x-1}(-\ln t)\, dt.$$

Si $x > -1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n + x > 0$ et donc d'après la question précédente,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 t^{n+x-1}(-\ln t)\, dt.$$

**C.3.** En déduire une expression intégrale de $g(x)$, autrement dit, déterminer une fonction $h(x,t)$ telle que

$$g(x) = \int_0^1 h(x,t)\, dt.$$

On aimerait pouvoir échanger les symboles $\Sigma$ et $\int$ dans l'expression de $g$ obtenue à la question **C.2**. Pour justifier cette interversion, posons pour $x > -1$ fixé,

$$u_n(t) = -t^{n+x-1} \ln t.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \to u_n(t)$ est intégrable sur $[0,1]$ (d'après la question **C.2**).
- Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in ]0,1[$,

$$\sum_{n=1}^{N} u_n(t) = \sum_{n=1}^{N} t^{n+x-1}(-\ln t) = -t^{x-1} \ln t \frac{t - t^{N+1}}{1-t} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} -\frac{t^x \ln t}{1-t}.$$

- Posons $\varphi(t) = -\frac{t^x \ln t}{1-t}$. Comme $u_n(t) > 0$ pour tout $t \in ]0,1[$, on a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in ]0,1[$,

$$\left| \sum_{n=1}^{N} u_n(t) \right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) = \varphi(t).$$

De plus, $\varphi$ est intégrable sur $[0,1]$. En effet,

— $\varphi$ est continu sur $]0,1[$,

— $\varphi$ est intégrable en 1 car

$$\varphi(t) \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 1,$$

— $\varphi$ est intégrable en 0 : en effet, comme on a fixé $x > -1$, on a

$$\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-\ln t}{t^{-x}} > 0 \text{ pour tout } t \in ]0,1[,$$

$$\frac{-x+1}{2} < 1 \ , \ \frac{x+1}{2} > 0 \text{ et } t^{\frac{-x+1}{2}} \frac{-\ln t}{t^{-x}} = -\ln(t) t^{\frac{x+1}{2}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, par le théorème de convergence dominée,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 t^{n+x-1}(-\ln t)\, dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} t^{n+x-1}(-\ln t)\, dt = \int_0^1 -\frac{t^x \ln t}{1-t}\, dt.$$

## Partie D - Développement asymptotique de $g$ en $+\infty$.

Dans la question **B.1**, on a trouvé un équivalent de $g$ en $+\infty$. Le but de cette partie est de trouver le deuxième terme du développement asymptotique de $g$ en $+\infty$. On note $E(t)$ la partie entière de $t$. On considère $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

**D.1.** On définit les polynômes de Bernoulli comme l'unique suite de polynômes telle que :

- $B_0 = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, B'_{n+1} = (n+1)B_n$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(x)dx = 0$.

a) Déterminer $B_1$ et $B_2$.

- $B'_1 = B_0 = 1$. Donc, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $B_1(t) = t + k$. Comme $\int_0^1 B_1 = 0$, on en déduit que,

$$\int_0^1 (t+k)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} + k = 0.$$

Donc $k = -\frac{1}{2}$ et $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $B'_2(t) = 2B_1(t) = 2t - 1$. Donc, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $B_2(t) = t^2 - t + k$. Comme $\int_0^1 B_2 = 0$, on en déduit que,

$$\int_0^1 (t^2 - t + k)\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{6} + k = 0.$$

Donc $k = \frac{1}{6}$ et $B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$.

b) On pose pour le reste du problème $\widetilde{B_1}(t) = B_1(t - E(t))$ et $\widetilde{B_2}(t) = B_2(t - E(t))$. Montrer que $\widetilde{B_1}$ et $\widetilde{B_2}$ sont 1-périodiques et continues.

Pour $i = 1, 2$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\widetilde{B_i}(t+1) = B_i(t+1-E(t+1)) = B_i(t+1-E(t)-1) = B_i(t-E(t)) = \widetilde{B_i}(t).$$

Donc $\widetilde{B_i}$ est 1-périodique.

Pour tout $t \in [0,1[$, $\widetilde{B_i}(t) = B_i(t)$. Donc $\widetilde{B_i}$ est continue sur $]0,1[$. De plus,

$$\widetilde{B_i}(1) = B_i(1-E(1)) = B_i(0) = \widetilde{B_i}(0).$$

Donc par 1-périodicité, $\widetilde{B_i}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**D.2.** Montrer que pour tout entier strictement positif $k$,

$$\int_k^{k+1} \widetilde{B_1} f' = \frac{1}{2}\left(f(k+1) + f(k)\right) - \int_k^{k+1} f.$$

Si $t \in [k, k+1[$, $\widetilde{B_1}(t) = t - k - \frac{1}{2}$. Donc en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned}
\int_k^{k+1} \widetilde{B_1} f' &= \left[\widetilde{B_1} f\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \widetilde{B_1}' f \\
&= \widetilde{B_1}(k+1) f(k+1) - \widetilde{B_1}(k) f(k) - \int_k^{k+1} f \\
&= \frac{1}{2}\left(f(k+1) + f(k)\right) - \int_k^{k+1} f.
\end{aligned}$$

**D.3.** En déduire que pour tout entier $N \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{N} f(k) = \int_1^N (f) + \frac{1}{2}\left(f(1) + f(N)\right) + \int_1^N \widetilde{B_1} f'.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant l'égalité précédente pour $k$ allant de 1 à $N-1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_1^N \widetilde{B_1} f' &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1} f(k+1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1} f(k) - \int_1^N f \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N} f(k) - f(1)\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N} f(k) - f(N)\right) - \int_1^N f \\
&= \sum_{k=1}^{N} f(k) - \frac{1}{2}\left(f(1) + f(N)\right) - \int_1^N f
\end{aligned}$$

ce qui est l'égalité demandée.

**D.4.** Montrer que $\widetilde{B_2}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et que sur cet ensemble, $\widetilde{B_2}' = 2\widetilde{B_1}$. En déduire que,

$$\int_k^{k+1} \widetilde{B_1} f' = \frac{1}{12}\left(f'(k+1) - f'(k)\right) - \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \widetilde{B_2} f''.$$

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Notons $k = E(t)$. Sur un voisinage de $t$, on a,

$$\widetilde{B_2}(t) = (t-k)^2 - (t-k) + \frac{1}{6} \text{ et } \widetilde{B_1}(t) = (t-k) - \frac{1}{2}.$$

Donc $\widetilde{B_2}$ est dérivable en $t$ et $\widetilde{B_2}'(t) = 2(t-k) - 1 = 2\widetilde{B_1}(t)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En intégrant par parties entre $k$ et $k+1$, on a,

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} \widetilde{B_1} f' = \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \widetilde{B_2}' f' &= \frac{1}{2}\left(\left[\widetilde{B_2} f'\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \widetilde{B_2} f''\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\widetilde{B_2}(k+1) f'(k+1) - \widetilde{B_2}(k) f'(k) - \int_k^{k+1} \widetilde{B_2} f''\right)\\ &= \frac{1}{12}\left(f'(k+1) - f'(k)\right) - \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \widetilde{B_2} f''.\end{aligned}$$

**D.5.** Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{N} f(k) = \int_1^N (f) + \frac{1}{2}\left(f(1) + f(N)\right) + \frac{1}{12}\left(f'(N) - f'(1)\right) - \frac{1}{2}\int_1^N \widetilde{B_2} f''.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant l'égalité précédente pour $k$ de 1 à $N-1$, on obtient,

$$\int_1^N \widetilde{B_1} f' = \frac{1}{12}\left(f'(N) - f'(1)\right) - \frac{1}{2}\int_1^N \widetilde{B_2} f''.$$

Il ne reste alors plus qu'à remplacer cette expression dans l'égalité trouvée à la question **D.3** pour obtenir l'égalité demandée.

**D.6.** Soit $x > -1$. On considère la fonction $f_x$ définie sur $[1, +\infty[$ par $f_x(t) = \frac{1}{(t+x)^2}$. Montrer que,

$$\int_1^{+\infty} \widetilde{B_2} f_x'' \text{ converge et que } \int_1^{+\infty} \widetilde{B_2} f_x'' = \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

$\widetilde{B_2} f_x''$ est continue sur $[1, +\infty[$. Pour établir la convergence de l'intégrale en $+\infty$, remarquons que la fonction $\widetilde{B_2}$ est bornée sur le segment $[0, 1]$ par le théorème de Weierstrass (on montre même facilement que sur $[0, 1]$, $\left|\widetilde{B_2}\right| \leqslant \frac{1}{6}$). Comme elle est 1-périodique, elle est bornée par $\frac{1}{6}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier. Par ailleurs, $f_x''(t) = \frac{6}{(t+x)^4}$. Ainsi, pour tout $t \geqslant 1$ et tout $x > -1$,

$$\left|\widetilde{B_2}(t) f_x''(t)\right| \leqslant \frac{1}{(t+x)^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}.$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4}\, dt$ est une intégrale de Riemann convergente, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \widetilde{B_2} f_x''$ converge absolument et donc converge. De plus,

$$\left|\int_1^{+\infty} \widetilde{B_2} f_x''\right| \leqslant \int_1^{+\infty} \left|\widetilde{B_2} f_x''\right| \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+x)^4} = \frac{-1}{3}\left[\frac{1}{(t+x)^3}\right]_{t=1}^{+\infty} = \frac{1}{3}\frac{1}{(1+x)^3} = \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

**D.7.** En utilisant les deux questions **D.5** et **D.6**, déterminer des constantes réelles $a$ et $b$ telles que,

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

En appliquant l'égalité de la question **D.5** à la fonction $f_x$, on obtient pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > -1$,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(x+k)^2} = \int_1^N \frac{1}{(x+t)^2}\,dt + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+N)^2}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{-2}{(N+x)^3} + \frac{2}{(1+x)^3}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^N \widetilde{B_2} f_x''(t)\,dt.$$

En remarquant que

$$\int_1^N \frac{1}{(x+t)^2}\,dt = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+N}$$

puis en faisant tendre $N$ vers $+\infty$, on obtient,

$$g(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{(x+1)^3} - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \widetilde{B_2} f_x''(t)\,dt.$$

Or, en utilisant la question **D.6**, on a,

$$\frac{1}{6}\frac{1}{(x+1)^3} - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \widetilde{B_2} f_x''(t)\,dt = \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} &= \frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} \\
&= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + \frac{1}{2x^2}\left(1 + \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^3}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

# 2 Problème d'Algèbre

Le but de ce problème est de démontrer et d'appliquer deux théorèmes de diagonalisation simultanée. Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

## Partie A : diagonalisation simultanée.

**Notations et présentation de la partie A.**

- $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes, $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$.
- $\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de $E$ et l'application identité de $E$ est noté $\mathrm{Id}_E$.
- Si $F$ est un sous espace vectoriel de $E$ et si $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit que $F$ est stable par $f$ si $f(F) \subset F$, et on note alors $f_{|F}$ la restriction de $f$ à $F$.
- Deux endomorphismes $f$ et $g$ commutent si $f \circ g = g \circ f$.
- Si $\lambda$ est une valeur propre d'un endomorphisme $f$, on notera $E_\lambda^f$ le sous espace propre associé ou simplement $E_\lambda$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'endomorphisme en question.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'algèbre des matrices carrées de taille $n$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ désigne le groupe constitué des matrices inversibles.
- $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ désigne la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont dans cet ordre $\lambda_1$, $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

Le but de cette partie est de montrer et d'appliquer le théorème de diagonalisation simultanée suivant :

**Théorème I :** Si $f$ et $g$ sont deux endomorphismes de $E$ diagonalisables et qui commutent, alors il existe une base commune de diagonalisation, autrement dit, il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ soient des matrices diagonales.

**A.1. Préliminaires** : soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Dans cette question nous démontrons les deux résultats de cours suivants :

- $f$ est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ simplement scindé tel que $P(f) = 0$.
- La restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous espace stable est diagonalisable.

a) Supposons $f$ diagonalisable et notons $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres de $f$ deux à deux distinctes. Montrer que le polynôme $P(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$ vérifie $P(f) = 0$.

$f$ est diagonalisable. Donc $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$. Soient $j \in [\![1, p]\!]$ et $v \in E_{\lambda_j}$ :

$$P(f)(v) = \left(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ i\neq j}} (f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)\right)((f - \lambda_j \mathrm{Id}_E)(v))$$

Comme $v \in E_{\lambda_j}$, on a $(f - \lambda_j Id_E)(v) = 0$. Donc $P(f)(v) = 0$. Donc $P(f)$ s'annule sur les $E_{\lambda_j}$ pour $j$ entre 1 et $p$. Donc $P(f) = 0$.

b) Réciproquement, soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts tel que le polynôme simplement scindé $P(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$ soit un polynôme annulateur de $f$. Montrer que $f$ est diagonalisable.

Par le lemme de décomposition du noyau,

$$\ker(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E).$$

Comme $P(f) = 0$, on a $\ker(P(f)) = E$. Donc $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$. Donc $f$ est diagonalisable.

c) Soit $F$ un sous espace vectoriel de $E$ stable par $f$, déduire des questions précédentes que si $f$ est diagonalisable, alors $f_{|F}$ est diagonalisable.

Remarquons que si $P$ est un polynôme, alors $P(f_{|F}) = P(f)_{|F}$. Ainsi, si $f$ est diagonalisable, alors il existe un polynôme $P$ simplement scindé tel que $P(f) = 0$. Donc $P(f)_{|F} = 0$. Donc $P(f_{|F}) = 0$. Il existe donc un polynôme simplement scindé $P$ tel que $P(f_{|F}) = 0$. Donc $f_{|F}$ est diagonalisable.

**A.2. Preuve du théorème I** : soient $f$ et $g$ deux endomorphismes diagonalisables qui commutent.

a) Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $f$, alors $E_\lambda^f$ est stable par $g$.

Soit $x \in E_\lambda^f$,

$$(f - \lambda \mathrm{Id}_E)(g(x)) = f(g(x)) - \lambda g(x) = g(f(x)) - \lambda g(x)) = g(f(x) - \lambda x) = g(0) = 0.$$

Donc $g(x) \in E_\lambda^f$. Donc $E_\lambda^f$ est stable par $g$.

b) En déduire le théorème I.

$f$ est diagonalisable. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ ses valeurs propres deux à deux distinctes. On a donc $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}^f$. D'après la question **A.2**.a), pour tout entier $i$ entre 1 et $p$, $E_{\lambda_i}^f$ est stable par $g$. Comme $g$ est diagonalisable, la question **A.1**.c) nous assure que $g_{|E_{\lambda_i}^f}$ est diagonalisable. Prenons donc pour tout entier $i$ entre 1 et $p$ une base $\mathcal{B}_i$ dans laquelle $g_{|E_{\lambda_i}^f}$ est diagonale. Comme $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}^f$, la concaténation $(\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$ définit une base $\mathcal{B}$ de $E$. Et par construction les matrices de $f$ et de $g$ dans cette base sont toutes deux diagonales.

**A.3. Application 1** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable sur $\mathbb{K}$. Le but de cette question est de montrer que l'application $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ définie par $f_A(M) = AMA + MA$ est diagonalisable.

a) Vérifier que $f_A$ est linéaire.

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, $(M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$,

$$f_A(\alpha M + M') = A(\alpha M + M')A + (\alpha M + M')A = \alpha(AMA + MA) + (AM'A + M'A)$$

$$= \alpha f_A(M) + f_A(M').$$

Donc $f$ est linéaire.

b) Notons $g_A$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $g_A(M) = AM$. Montrer que si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $g_{P(A)} = P(g_A)$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Remarquons tout d'abord que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $g_A^k(M) = A^k M$. Ainsi si $P = \sum_{k=0}^{\ell} a_k t^k \in \mathbb{K}[X]$, alors,

$$P(g_A)(M) = \left(\sum_{k=0}^{\ell} a_k g_A^k\right)(M) = \sum_{k=0}^{\ell}(a_k g_A^k(M)) = \sum_{k=0}^{\ell}(a_k A^k M)$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{\ell} a_k A^k\right) M = g_{P(A)}(M).$$

c) Montrer que $g_A$ est diagonalisable.

$A$ est diagonalisable, donc il existe un polynôme $P$ simplement scindé tel que $P(A) = 0$. Donc d'après la question précédente, $P(g_A) = g_{P(A)} = g_0 = 0$. On a donc trouvé un polynôme $P$ simplement scindé tel que $P(g_A) = 0$. Donc $g_A$ est diagonalisable.

On considère également l'endomorphisme $d_A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $d_A(M) = MA$ et, comme le raisonnement est analogue, on admet que $d_A$ est diagonalisable.

d) Montrer que $g_A$ et $d_A$ commutent.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$(g_A \circ d_A)(M) = g_A(MA) = AMA = d_A(AM) = (d_A \circ g_A)(M).$$

Donc $g_A$ et $d_A$ commutent.

e) Conclure.

Remarquons pour commencer que $f = d_A \circ g_A + d_A$. D'après la question précédente et le théorème I, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et deux matrices diagonales $D$ et $\Delta$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g_A) = D$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(d_A) = \Delta$. Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(d_A \circ g_A + d_A) = \Delta D + \Delta$ est une matrice diagonale. L'application $f = d_A \circ g_A + d_A$ est donc bien diagonalisable.

**A.4. Application 2** : Soit $p$ un entier positif impair et $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = \sum_{k=1}^{p} \frac{X^k}{k}$. Le but de cette question est de montrer que si $A$ et $B$ sont deux matrices à coefficients réels diagonalisables dans $\mathbb{R}$ et si $P(A) = P(B)$ alors $A = B$.

a) Montrer que la fonction polynômiale $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective.

$P$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $P'(t) = \sum_{k=1}^{p} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{p-1} t^k$ n'a pas de racines réelles. En effet les racines de $P'$ sont les nombres complexes $e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ pour $k \in [\![1, p]\!]$ qui sont tous non réels puisque $p$ est impair. Ainsi $P'$ est de signe constant. Comme $P'(0) = 1$, on en déduit donc que $P'(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc $P$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim_{t \to -\infty} P(t) = -\infty$ et $\lim_{t \to +\infty} P(t) = +\infty$, on en déduit par le théorème de la bijection que l'application $P$ est bijective.

b) Soient $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S \in \mathbb{R}[X]$ et $W \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer en détaillant que :

$$S(D) = \operatorname{diag}(S(\alpha_1), \cdots, S(\alpha_n)) \text{ et } S(WDW^{-1}) = WS(D)W^{-1}.$$

Notons $S(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$. Par une récurrence simple, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k = \operatorname{diag}(\alpha_1^k, \cdots, \alpha_n^k)$. Donc,

$$\begin{aligned} S(D) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k D^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \operatorname{diag}\left(\alpha_1^k, \cdots, \alpha_n^k\right) &= \operatorname{diag}\left(\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \alpha_1^k, \cdots, \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \alpha_n^k\right) \\ &= \operatorname{diag}\left(S(\alpha_1), \cdots, S(\alpha_n)\right). \end{aligned}$$

Par une récurrence simple, on montre également que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(WDW^{-1}\right)^k = WD^kW^{-1}$. Ainsi :

$$S(WDW^{-1}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \left(WDW^{-1}\right)^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k WD^kW^{-1} = WS(D)W^{-1}.$$

c) Soient $(x_1, \cdots x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ tous distincts et $(y_1, \cdots, y_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$. Montrer que le polynôme $Q(t) = \sum_{i=1}^{\ell} y_i \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\ell} \frac{t - x_j}{x_i - x_j} \right)$ vérifie $Q(x_k) = y_k$ pour tout $k \in [\![1, \ell]\!]$.

Posons $L_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\ell} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}$. Pour tout $(i,k) \in [\![1, \ell]\!]^2$, $L_i(x_k) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\ell} \frac{x_k - x_j}{x_i - x_j} = \delta_{ik}$ où $\delta_{ik} = 0$ si $i \neq k$ et $\delta_{ik} = 1$ si $k = i$. Donc $Q(x_k) = \sum_{i=1}^{\ell} y_i \delta_{ik} = y_k$.

Soient $A$ et $B$ deux matrices à coefficients réels diagonalisables dans $\mathbb{R}$ et telles que $P(A) = P(B)$. D'après le théorème I, il existe donc deux matrices $U$, $V$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ainsi que deux matrices diagonales $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et $\Delta = \operatorname{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$U^{-1}AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = D \;\text{ et }\; V^{-1}BV = \operatorname{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n) = \Delta.$$

Il existe également, d'après la question **A.4**.c), un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(P(\mu_i)) = \mu_i$.

d) Montrer qu'il existe un polynôme $R$ tel que $R(B) = A$.

$Q(P(\mu_i)) = \mu_i$. Donc, d'après la question **A.4**.b), $Q(P(D)) = D$. Donc, encore par la question **A.4**.b) $Q(P(A)) = A$. Or $P(A) = P(B)$. Donc $Q(P(B)) = A$. Donc $R(B) = A$ où $R(X) = Q(P(X))$.

e) En déduire que $A$ et $B$ commutent.

Posons $R(X) = \sum_{k=0}^{\ell} r_k X^k$ un polynôme quelconque :

$$AB = R(B)B = \left(\sum_{k=0}^{\ell} r_k B^k\right) \cdot B = \sum_{k=0}^{\ell} r_k B^{k+1} = B \cdot \sum_{k=0}^{\ell} r_k B^k = BR(B) = BA.$$

f) Conclure.

$A$ et $B$ commutent. Donc d'après le théorème I, il existe $W \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que,

$$W^{-1}AW = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = D \text{ et } W^{-1}BW = diag(\mu_1, \cdots, \mu_n) = \Delta.$$

D'après la question **A.4**.b) et comme $P(A) = P(B)$, on déduit que

$$P(D) = P\left(W^{-1}AW\right) = W^{-1}P(A)W = W^{-1}P(B)W = P\left(W^{-1}BW\right) = P(\Delta).$$

Donc, d'après la question **A.4**.b),

$$\mathrm{diag}(P(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_n))) = \mathrm{diag}(P(\mu_1), \cdots, P(\mu_n))).$$

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(\lambda_i) = P(\mu_i)$ et donc comme $P$ est bijective d'après la question **A.4**.a), on a $\lambda_i = \mu_i$. Donc $D = \Delta$ et enfin $A = B$.

## Partie B : diagonalisation simultanée des matrices symétriques.

**Notations et présentation de la partie B.**

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $A^T$ désigne sa transposée.
- On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
$$X^T AX > 0.$$
- $\mathcal{S}_n$ est le sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques et $\mathcal{S}_n^{++}$ désigne l'ensemble constitué des matrices symétriques définies positives.
- On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- La matrice d'un produit scalaire $\varphi$ de $\mathbb{R}^n$ dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est notée :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) := (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Le but de cette partie est de montrer et d'appliquer le théorème de diagonalisation simultanée suivant :

**Théorème II :** Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $B \in \mathcal{S}_n$. Alors, il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{R})$ tel que

$$A = P^T I_n P = P^T P \text{ et } B = P^T DP.$$

**B.1. Preuve du théorème II :** Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $B \in \mathcal{S}_n$. Notons $\varphi$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour $\varphi$ et notons enfin $Q = Q_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$.

a) Donner une relation entre $Q$ et $A$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = Q^T \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi) Q.$$

Donc,

$$I_n = Q^T A Q.$$

b) Notons $C = Q^T B Q$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $R$ et une matrice diagonale $D$ telles que,

$$R^T D R = C.$$

$$C^T = \left(Q^T B Q\right)^T = Q^T B^T Q = Q^T B Q = C.$$

La matrice $C$ est donc symétrique réelle. Elle est donc orthonormalement diagonalisable. Par conséquent, il existe une matrice orthogonale $R$ telle que

$$R^T D R = C.$$

c) Déterminer une matrice $P$ telle que,

$$A = P^T P \text{ et } B = P^T D P.$$

$$B = \left(Q^T\right)^{-1} C Q^{-1} = \left(Q^T\right)^{-1} R^T D R Q^{-1} = \left(R Q^{-1}\right)^T D R Q^{-1}.$$

Posons,

$$P = R Q^{-1}.$$

On a donc,

$$B = P^T D P.$$

Comme $R$ est orthogonale,

$$R^T R = I_n$$

et donc,

$$P^T P = \left(R Q^{-1}\right)^T R Q^{-1} = \left(Q^{-1}\right)^T R^T R Q^{-1} = \left(Q^{-1}\right)^T Q^{-1} = A.$$

**B.2. Application :** Soient $(A, B) \in (\mathcal{S}_n^{++})^2$. Le but de cette question est d'utiliser le théorème II pour démontrer l'inégalité suivante :

$$(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geqslant \det(A)^{\frac{1}{n}} + \det(B)^{\frac{1}{n}}. \tag{1}$$

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On rappelle que, par définition, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si pour tous $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

a) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que pour tous $x_1, \dots, x_n \in I$ et pour tous réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

On raisonne par récurrence sur le nombre $n$ de points.
**Initialisation :** pour $n = 1$, l'inégalité est $f(x_1) \leqslant f(x_1)$.
**Hérédité.** Supposons l'énoncé vrai pour un certain entier $n \geqslant 1$. Soient $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geqslant 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.
Si tous les $\lambda_i$ entre 0 et $n$ valent 0, le résultat est évident. Sinon, posons

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 - \lambda_{n+1} \text{ et } y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i.$$

En remarquant que $\mu + \lambda_{n+1} = 1$ et que $y \in I$, on déduit de la définition d'une fonction convexe que,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\big(\mu y + \lambda_{n+1} x_{n+1}\big) \leqslant \mu f(y) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

Or, $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu} = 1$. Donc, par l'hypothèse de récurrence,

$$f(y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu} f(x_i).$$

On en déduit donc,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

b) Montrer que la fonction $x \mapsto h(x) = \ln(1+e^x)$ est convexe puis que pour tous réels strictement positifs $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{\frac{1}{n}}.$$

La fonction $h$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \geqslant 0$. La fonction $h$ est donc convexe.

Pour tout $i$ entre 1 et $n$, $\lambda_i \geqslant 0$. Posons donc $\lambda_i = e^{\alpha_i}$. En appliquant l'inégalité de la question précédente à la fonction $h$ avec $\lambda_i = \frac{1}{n}$ pour tout $i$ entre 1 et $n$ et $x_i = \alpha_i$, on obtient,

$$\ln\left(1 + e^{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{n}}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+e^{\alpha_i}\right).$$

Donc,

$$\ln\left(1 + \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{\alpha_i}{n}}\right) \leqslant \ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{n}}\right),$$

d'où l'on déduit l'inégalité demandée en remplaçant $e^{\alpha_i}$ par $\lambda_i$ et par croissance de ln.

c) Montrer l'inégalité (1).

D'après le théorème II, il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ tel que

$$A = P^T P \text{ et } B = P^T D P.$$

Comme par ailleurs $B$ est définie positive, ses valeurs propres sont strictement positives, donc les $\lambda_i$ sont tous strictement positifs. On a les deux égalités

$$(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} = \det\left(P^T(I_n+D)P\right)^{\frac{1}{n}} = \det(P)^{\frac{2}{n}} \cdot \det(I_n+D)^{\frac{1}{n}},$$

$$\det(A)^{\frac{1}{n}} + \det(B)^{\frac{1}{n}} = \det\left(P^T P\right)^{\frac{1}{n}} + \det\left(P^T D P\right)^{\frac{1}{n}} = \det(P)^{\frac{2}{n}} \cdot \left(1 + \det(D)^{\frac{1}{n}}\right).$$

L'inéquation (1) est donc équivalente à

$$\det(I_n+D)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(1 + \det(D)^{\frac{1}{n}}\right),$$

c'est-à-dire à

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{\frac{1}{n}}$$

qui est exactement l'inégalité démontrée à la question **B.2.**b).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2026

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

**ISE Option Mathématiques**

**CORRIGÉ de la 2$^{\text{ème}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

L'épreuve est constituée de six exercices indépendants à traiter dans un ordre quelconque. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

## Notations

Dans tout le sujet, nous utiliserons les notations suivantes :

- $i$ désigne l'unique nombre complexe tel que $e^{i\pi} = -1$.
- $\mathbb{E}[X]$ désigne l'espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle $X$.
- $V(X)$ désigne la variance mathématique d'une variable aléatoire réelle $X$.
- $M_{p,q}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices à $p$ lignes et $q$ colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Pour une matrice $M \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, on notera $M^T$ la matrice transposée de $M$.
- Pour tout sous-espace $F$ d'un espace euclidien $E$, $F^\perp$ désigne le supplémentaire orthogonal de $F$ dans $E$ et le produit scalaire de deux vecteurs $x$ et $y$ de $F$ sera noté $\langle x, y\rangle$.

# Exercice 1

Soient $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}\, a_{n-1}$. Nous nous intéressons à la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.

Démontrons par récurrence double le résultat : $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$ donc on a $1 \leqslant a_1 \leqslant 1^2$ et $1 \leqslant a_2 \leqslant 2^2$. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$, supposons alors que l'égalité soit vraie aux rangs $n$ et $n-1$ , on peut alors obtenir l'encadrement suivant pour $a_{n+1}$ :

$$1 + \tfrac{2}{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant n^2 + \frac{2(n-1)^2}{n+1}.$$

Le membre de gauche est clairement plus grand que 1. Pour celui de droite, étudions son écart à $(n+1)^2$ :

$$(n+1)^2 - n^2 - \frac{2(n-1)^2}{n+1} = 2n+1 - \frac{2(n-1)^2}{n+1} = \frac{(2n+1)(n+1) - 2(n-1)^2}{n+1} = \frac{7n-1}{n+1},$$

cette dernière quantité étant positive nous aboutissons à l'encadrement désiré pour $a_{n+1}$.

2. (a) Déterminer le rayon de convergence $R$ de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$. On note $S(x)$ sa somme.

Le terme général $a_n|x^n|$ de la série entière est ainsi encadré par les termes respectifs $|x^n|$ et $n^2|x^n|$. Or la série de terme général $|x^n|$ diverge pour tout $|x| > 1$ et celle de terme général $n^2|x^n|$ converge pour tout $|x| < 1$ d'après la règle de d'Alembert : en effet $\frac{(n+1)^2|x|^{n+1}}{n^2|x|^n} = (1+\frac{1}{n})^2|x|$ converge vers $|x|$ qui est bien inférieur à 1 dans ce cas. Donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$. De plus, pour $x = \pm 1$, la série diverge car le terme général ne tend pas vers 0 car $a_n \geqslant 1$. En conclusion, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est de rayon 1.

(b) Montrer que $S(x)$ est solution de $y' = \frac{1+2x}{1-x} y$.

Rappelons que la série dérivée donnée par $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ possède le même rayon de convergence que $S(x)$. Réécrivons alors la relation de récurrence en multipliant par $x^n$ :

$$(n+1)a_{n+1}x^n = (n+1)a_n x^n + 2a_{n-1}x^n.$$

En sommant l'égalité pour $|x| < 1$, les quantités suivantes apparaissent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = S'(x) - 1 \times a_1 x^0 = S'(x) - 1,$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_n x^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = xS'(x) + S(x) - 1,$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2a_{n-1}x^n = 2x\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n-1} = 2x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2xS(x),$$

aboutissant ainsi à :

$$S'(x) - 1 = xS'(x) + S(x) - 1 + 2xS(x) \Longleftrightarrow (1-x)S'(x) = (1+2x)S(x).$$

Pour $x \in ]-1,1[$, on peut alors écrire :

$$S'(x) = \frac{1+2x}{1-x} S(x).$$

(c) En déduire une expression de $S(x)$.

Les solutions $f$ de cette équation linéaire, sachant que la fonction $x \mapsto \frac{1+2x}{1-x}$ est continue sur $]-1,1[$, sont de la forme

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad f(x) = \lambda e^{A(x)},$$

où $A$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1+2x}{1-x}$ sur $]-1,1[$, et $\lambda$ une constante réelle. Afin de déterminer la primitive $A$, il faut décomposer la fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{1+2x}{1-x} = \frac{3+2(x-1)}{1-x} = \frac{3}{1-x} - 2,$$

on peut prendre $A(x) = -3\ln(1-x) - 2x$. Ainsi $f(x) = \lambda \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$, en utilisant $x = 0$, on obtient $\lambda = a_0 = 1$. En conclusion

$$S(x) = \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}.$$

## Exercice 2

Considérons $f$ et $g$ les fonctions définies par

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que $f$ et $g$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   Appelons $h$ la fonction qui à $t$ associe $e^{-t^2}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur tout segment $[0,x]$ où $x$ est un réel quelconque. Ainsi, $f$ est la primitive de $h$ qui s'annule en 0. La fonction $f$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = h(x)$.

   Pour $g$, quel que soit $x$ un nombre réel, $g(x)$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur $[0,1]$. De plus, la fonction $x \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto -2xe^{-x^2(1+t^2)}$. Or les fonctions $t \mapsto -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ sont continues sur $[0,1]$ et dominées en valeur absolue par la fonction $t \mapsto 2x$ intégrable sur $[0,1]$. En conclusion, $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt.$$

2. Montrer que $f^2 + g$ est constante sur $\mathbb{R}$ et déterminer la valeur de la constante.

   Il suffit de montrer que la dérivée est nulle sur l'intervalle considéré, ici $\mathbb{R}$.

$$(f^2 + g)'(x) = 2f'(x)f(x) + g'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt.$$

   Si $x = 0$, la dérivée est bel et bien nulle. Pour $x \neq 0$, on effectue alors le changement de variable $u = \frac{t}{x}$ dans la première intégrale,

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^1 e^{-(ux)^2} x du,$$

   ainsi

$$(f^2 + g)'(x) = 2x \int_0^x e^{-x^2(1+u^2)} du - 2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = 0.$$

   La fonction $f^2 + g$ est de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$, elle est donc constante et $f^2(x) + g(x) = f^2(0) + g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

3. Déduire des questions précédentes la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

   L'intégrale $I$ existe par comparaison de l'intégrande positive à celui d'une intégrale de Riemann convergente en $+\infty$. Cela garantit $I = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. Pour utiliser le résultat précédent, nous allons étudier le comportement de $g$ en l'infini. Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant g(x) \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+t^2} dt = \tfrac{\pi}{4} e^{-x^2}.$$

   Par le Théorème d'encadrement, on obtient la convergence de $g$ vers 0 en $+\infty$, on en déduit alors que

$$\tfrac{\pi}{4} = \lim_{x \to +\infty} f^2(x) + g(x) = \left( \lim_{x \to +\infty} f(x) \right)^2 = I^2 \Longrightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4. En déduire que l'intégrale $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt$ vaut 1.

   L'intégrande étant paire $J = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, on pose alors le changement de variable $u = \sqrt{2}t$,

$$J = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \sqrt{2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} I = 1.$$

5. Considérons la fonction $\varphi$ suivante :

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx - \frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

(a) Montrer que $\varphi$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Remarquons que $\left|\frac{e^{itx-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right| \leqslant h(t)$, avec $h$ intégrable sur $\mathbb{R}$, donc à $x$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{e^{itx-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, de plus à $t$ fixé, la fonction $x \mapsto \frac{e^{itx-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $x \mapsto it\frac{e^{itx-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ dominée en module par $|t|\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ intégrable en $t$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\varphi$ est dérivable et

$$\varphi'(x) = i\int_{-\infty}^{+\infty} t\frac{e^{itx-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt.$$

(b) Exprimer $\varphi'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

En utilisant l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= i\int_{-\infty}^{+\infty} t\frac{e^{itx-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt = -i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{2\pi}}h'(t)dt\\ &= -i\left[\frac{e^{itx}}{\sqrt{2\pi}}h(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} + i\int_{-\infty}^{+\infty} ix\frac{e^{itx}}{\sqrt{2\pi}}h(t)dt = 0 - x\varphi(x)\\ \varphi'(x) &= -x\varphi(x),\end{aligned}$$

la limite du crochet étant obtenue par contrôle de son module par $h(t)$ qui tend vers 0. Ainsi $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$.

(c) En déduire l'expression de $\varphi(x)$.

Il faut intégrer l'équation linéaire, une primitive de $x \mapsto -x$ sur $\mathbb{R}$ étant $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$, on en déduit : $\varphi(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$, en prenant $x = 0$, on conclut par

$$\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

## Exercice 3

Une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \forall n, p \geqslant M, \quad \|u_n - u_p\| \leqslant \varepsilon.$$

1. Montrer que toute suite convergente d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ est de Cauchy.

   En partant de la définition de la convergence de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers une certaine limite $\ell$, posons $\varepsilon > 0$ quelconque, alors

   $$\exists M \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant M,\ \|u_n - \ell\| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

   Ainsi, pour $n$ et $p$ plus grands que $M$, l'inégalité triangulaire nous permet d'obtenir la majoration recherchée :

   $$\|u_n - u_p\| \leqslant \|u_n - \ell\| + \|u_p - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

Dans la suite de l'exercice, $E = \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ est l'ensemble des fonctions continues de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$. On notera $0_E$ la fonction identiquement nulle de $E$. On définit enfin l'application $N$ de $E$ dans $\mathbb{R}^+$ par

$$N(f) = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}.$$

2. (a) Démontrer pour tous nombres complexes $u$ et $v$ l'inégalité $|uv| \leqslant \frac{|u|^2}{2} + \frac{|v|^2}{2}$ et en déduire que pour toutes fonctions $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)|dx \leqslant \frac{\lambda^2}{2} N(f)^2 + \frac{1}{2\lambda^2} N(g)^2.$$

Le première inégalité s'obtient en développant $(|u| - |v|)^2 \geqslant 0$ et en divisant par 2. La seconde est une simple application au cas $u = \lambda f$ et $v = g/\lambda$.

(b) En déterminant le minimum de la fonction $h\colon \lambda \mapsto \frac{\lambda^2}{2} N(f)^2 + \frac{1}{2\lambda^2} N(g)^2$, montrer l'inégalité

$$\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)|dx \leqslant N(f)N(g).$$

Pour obtenir les variations, le calcul est immédiat $h'(\lambda) = \lambda N(f) - \frac{1}{\lambda^3} N(g)$, qui est positive si et seulement si $\lambda^4 \geqslant \frac{N(g)^2}{N(f)^2}$ ou de façon équivalente $\lambda \geqslant \sqrt{\frac{N(g)}{N(f)}}$, ainsi $h$ réalise son minimum en $\sqrt{\frac{N(g)}{N(f)}}$, or

$$h\left(\sqrt{\frac{N(g)}{N(f)}}\right) = \frac{N(g)}{2N(f)} N(f)^2 + \frac{N(f)}{2N(g)} N(g)^2 = N(f)N(g).$$

(c) En déduire que $N$ est une norme sur $E$.

L'homogénéité est conséquence immédiate des propriéts du module. De même si $N(f) = 0$, alors par continuité de $|f|^2$, on obtient qu'elle est identiquement nulle sur $[0, 2\pi]$ et donc que $f$ aussi. Enfin l'inégalité triangulaire découle du résultat précédent

$$N(f + g)^2 = N(f)^2 + N(g)^2 + 2\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)|dx \leqslant (N(f) + N(g))^2.$$

3. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $E$ donnée par $g_n(x) = e^{inx}$. Montrer que $N(g_n - g_p) = 2\sqrt{\pi}$.

Par le calcul, pour $n$ et $p$ deux entiers naturels, en factorisant classiquement à l'aide de l'angle moyen,

$$N(g_n - g_p)^2 = \int_0^{2\pi} |e^{inx} - e^{inp}|^2 dx = \int_0^{2\pi} |e^{i\frac{(n+p)}{2}x}||e^{i(n-p)x} - e^{-i(n-p)x}|^2 dx = \int_0^{2\pi} 2\sin(x)^2 dx.$$

On utilise alors l'identité $1 - \cos(2x) = 2\sin(x)^2$, pour aboutir finalement à

$$N(g_n - g_p)^2 = \int_0^{2\pi} 1 - \cos(2x) dx = \left[x - \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{2\pi} = 4\pi.$$

4. En déduire que la boule fermée centrée en $0_E$, de rayon 1 pour la norme $N$ n'est pas compacte.
   On peut déjà affirmer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy, ainsi que toute suite extraite, or une suite convergente est forcément de Cauchy, donc aucune suite extraite ne peut converger. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments tels que $N(g_n) = \sqrt{2\pi}$, la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $h_n = \frac{g_n}{\sqrt{2\pi}}$ est alors une suite de la boule considérée car $N(h_n) = 1$, dont aucune suite extraite ne converge. L'ensemble n'est donc pas compact.

## Exercice 4

Dans ce problème d'estimation, on dispose de $n$ $(n \geqslant 2)$ observations indépendantes $(X_1, \ldots, X_n)$ de même loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$ inconnu. On souhaite estimer $e^{-\theta}$.

Pour rappel, $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}.$$

On dit que $\hat{\lambda}$ est un estimateur sans biais d'une quantité $\lambda$ si $\hat{\lambda}$ est une variable aléatoire fonction de l'échantillon, c'est à dire $\hat{\lambda} = f(X_1, \ldots, X_n)$ pour une certain fonction $f$, et si $\mathbb{E}[\hat{\lambda}] = \lambda$. Pour deux estimateurs sans biais de $\lambda$, on préfèrera celui dont la variance est la plus petite.

On définit, pour $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire $Y_i$ par

$$\begin{cases} Y_i = 1, \text{ si } X_i = 0, \\ Y_i = 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

On note enfin $\overline{Y}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1. Calculer l'espérance et la variance de $\overline{Y}_n$.
   La variable $Y_i$ suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\mathbb{P}(X_i = 0))$, ici $\mathbb{P}(X_i = 0) = e^{-\theta.}$ Par linéarité de l'espérance, en utilisant l'espérance d'une variable de Bernoulli :

$$\mathbb{E}[\overline{Y}_n] = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[Y_i] = e^{-\theta}.$$

   Pour le calcul de la variance, on utilise l'indépendance des variables $Y_i$ :

$$V(\overline{Y}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = \frac{e^{-\theta}(1 - e^{-\theta})}{n}.$$

2. Soit, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$. On définit $\varphi_n(j) = \mathbb{P}_{S_n=j}(X_n = 0)$ la probabilité conditionnelle de $\{X_n = 0\}$ sachant $\{S_n = j\}$.
   (a) Montrer que $S_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $k\theta$.
   Montrons que la somme de deux variables indépendantes $X$ et $Y$ de loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda$ et $\mu$ est encore une variable de loi de Poisson, mais de paramètre

$\lambda+\mu$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on utilise alors successivement la formule des probabilités totales, l'indépendance puis finalement le binôme de Newton

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=j) &= \sum_{i=0}^{j} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j-i) = e^{-\lambda-\mu} \sum_{i=0}^{j} \frac{\lambda^i \mu^{j-i}}{i!(j-i)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda-\mu}}{j!} \sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{i!(j-i)!} \lambda^i \mu^{j-i} = \frac{e^{-\lambda-\mu}}{j!} (\lambda+\mu)^i.\end{aligned}$$

Une démonstration par récurrence immédiate permet alors de conclure.

(b) Montrer que pour tout entier naturel $j$, $\varphi_n(j) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^j$.

En partant des définitions des variables

$$\begin{aligned}\varphi_n(j) = P(X_n = 0 | S_n = j) &= \frac{\mathbb{P}(\{X_n = 0\} \cap \{S_n = j\})}{\mathbb{P}(S_n = j)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{X_n = 0\} \cap \{S_{n-1} = j\})}{\mathbb{P}(S_n = j)} \\ &= \frac{e^{-\theta} e^{-(n-1)\theta} ((n-1)\theta)^j}{e^{-n\theta} (n\theta)^j} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j.\end{aligned}$$

La valeur $\varphi_n(j)$ étant indépendante de $\theta$, on s'intéresse à l'estimateur $\varphi_n(S_n)$.

3. Calculer l'espérance et la variance de $\varphi_n(S_n)$.

D'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}[\varphi_n(S_n)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \frac{(n\theta)^k}{k!} e^{-n\theta} = e^{-n\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} (n-1)^k \frac{\theta^k}{k!} = e^{-n\theta} e^{(n-1)\theta} = e^{-\theta}.$$

Commençons par le moment d'ordre 2, en utilisant le théorème de transfert

$$E[\varphi_n(S_n)^2] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2k} e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^k}{k!} = e^{-n\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(n - 2 + \frac{1}{n}\right)^k \frac{\theta^k}{k!} = e^{-n\theta} e^{\left(n-2+\frac{1}{n}\right)\theta} = e^{\left(-2\theta + \frac{\theta}{n}\right)}.$$

On en déduit alors la variance :

$$V(\varphi_n(S_n)) = e^{\left(-2\theta + \frac{\theta}{n}\right)} - e^{-2\theta} = \exp(-2\theta) \left(\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) - 1\right).$$

4. Montrer que $1 \leqslant \frac{e^\theta - 1}{\theta} \leqslant e^\theta$ et en déduire que la fonction $h$ donnée par $h(\theta) = \frac{e^\theta - 1}{\theta}$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On applique le Théorème des accroissements finis, car pour tout $\theta > 0$ l'exponentielle est continue sur $[0, \theta]$ et dérivable sur $]0, \theta[$. Il existe alors $c \in ]0, \theta[$ tel qui $\frac{e^\theta - 1}{\theta} = e^c$, d'où l'encadrement. Il suffit alors de dériver $h$ et d'utiliser l'inégalité précédente,

$$h'(x) = \frac{\theta e^\theta - e^\theta + 1}{t^2} \geqslant \frac{e^\theta - 1 - e^\theta + 1}{t^2} = 0.$$

5. Montrer enfin que $V(\varphi_n(S_n)) \leqslant V(\overline{Y}_n)$. Interpréter le résultat au regard du problème d'estimation considéré.

$$\frac{V(\overline{Y}_n)}{V(\varphi_n(S_n))} = \frac{\frac{e^{-\theta}(1-e^{-\theta})}{n}}{\exp(-2\theta)\left(\exp\left(\frac{\theta}{n}\right)-1\right)} = \frac{e^{\theta}-1}{n(e^{\frac{\theta}{n}}-1)} = \frac{\frac{e^{\theta}-1}{\theta}}{\frac{e^{\frac{\theta}{n}}-1}{\frac{\theta}{n}}} \geqslant 1,$$

par croissance de $h$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Les deux estimateurs étant de même espérance $e^{-\theta}$, donc sans biais, on aura tendance à préférer celui avec la plus petite variance, en l'occurence $\varphi_n(S_n)$.

## Exercice 5

Considérons une production industrielle d'allumettes. A la fin d'une journée donnée, on souhaiterait évaluer la proportion d'allumettes défectueuses sur le total des $t$ allumettes produites. On notera $d$ le nombre d'allumettes défectueuses. Le tirage aléatoire d'un échantillon de $n$ allumettes parmi les $t$ disponibles est effectué, et chacune d'entre elles est grattée pour vérifier si elle s'allume ou pas. C'est le seul critère de conformité considéré ici. On suppose $t \geqslant d \geqslant 2$.

1. En considérant le polynôme $P(X) = (1+X)^{k+\ell}$, démontrer la formule de Vandermonde :

$$\binom{k+\ell}{m} = \sum_{j=0}^{m} \binom{k}{j}\binom{\ell}{m-j}.$$

En appliquant la formule du binôme de Newton :

$$P(X) = (1+X)^{k+\ell} = \sum_{m=0}^{k+\ell} \binom{k+\ell}{m} X^m = (1+X)^k(1+X)^\ell = \left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}X^j\right)\left(\sum_{i=0}^{\ell}\binom{\ell}{i}X^i\right).$$

Il faut alors utiliser l'identification des coefficients de polynômes égaux. Le coefficient devant $X^m$ dans le développement du dernier membre permet d'aboutir au résultat. En effet il faut que $j \leqslant m$ dans la première somme et seul le $i^e$ terme tel que $i + j = m$ dans la deuxième somme fera apparaître une puissance $m$ de $X$ dans le développement.

2. Montrer que la loi de la variable aléatoire $X$ correspondant au nombre d'allumettes défectueuses dans le prélèvement est donnée par

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{d}{k}\binom{t-d}{n-k}}{\binom{t}{n}}.$$

Considérons l'univers fini constitué des combinaisons de $n$ allumettes prises parmi les $t$ produites, supposées équiprobables. Il suffit alors de dénombrer les combinaisons correspondant à un nombre choisi $0 \leqslant k \leqslant n$ de défectueuses. Pour compter ces combinaisons, il faut regarder le nombre $\binom{d}{k}$ de combinaisons de $k$ allumettes prises parmi les $d$ défectueuses. Pour chacune de ces combinaisons, il existe alors $\binom{t-d}{n-k}$ façons de la compléter avec une combinaison d'allumettes non-défectueuses, ainsi

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{d}{k}\binom{t-d}{n-k}}{\binom{t}{n}}.$$

On remarquera que l'égalite de Vandermonde garantit que ces probabilités somment à 1. De plus, avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, le résultat reste vrai même si $n > d$, c'est-à-dire quand l'échantillon est plus grand que la population d'allumettes défectueuses, où alors la probabilité d'avoir au moins une allumette fonctionnelle dans l'échantillon est égale à 1.

3. Montrer la relation suivante : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k\binom{d}{k} = d\binom{d-1}{k-1}$.

   En partant de la définition de la factorielle et des coefficients binomiaux, pour $1 \leqslant k \leqslant d$ on peut écrire :

$$\binom{d-1}{k-1} = \frac{(d-1)!}{(k-1)!(d-1-k+1)!} = \frac{k}{d}\frac{d!}{k!(d-k)!} \Leftrightarrow d\binom{d-1}{k-1} = k\binom{d}{k}.$$

4. Déduire des questions précédentes que l'espérance $\mathbb{E}[X]$ vaut $n\frac{d}{t}$.

   La variable étant finie, l'espérance est alors donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\frac{\binom{d}{k}\binom{t-d}{n-k}}{\binom{t}{n}} = \frac{d}{\binom{t}{n}}\sum_{k=1}^{n}\binom{d-1}{k-1}\binom{t-d}{n-k} = \frac{d}{\frac{t}{n}\binom{t-1}{n-1}}\sum_{k=1}^{n} d\binom{d-1}{k-1}\binom{t-d}{n-k} = n\frac{d}{t},$$

   la dernière égalité découlant directement de l'égalité de Vandermonde.

On admet que la variance de $X$ est donnée par $n\frac{d}{t}\frac{t-d}{t}\frac{t-n}{t-1}$.

5. Montrer que pour tout $x \in [0,1],\ x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.

   Il suffit de raisonner sur la courbe correspondante, une parabole orientée vers le bas, de racines 0 et 1, son maximum est atteint en $\frac{1}{2}$ d'image $\frac{1}{4}$.

6. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, en supposant $\alpha, \beta \in [0,1]$ fixés, sachant aussi que $p = \frac{d}{t}$ est inconnu, établir une taille suffisante $n$ de l'échantillon, fonction de $\alpha$, $\beta$ et $t$, pour assurer le contrôle d'erreur d'estimation suivant :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{d}{t}\right| \geqslant \alpha\right) \leqslant \beta.$$

   On applique l'inégalité :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{d}{t}\right| \geqslant \alpha\right) = \mathbb{P}\left(\left|X - \frac{nd}{t}\right| \geqslant n\alpha\right) \leqslant \frac{n\frac{d}{t}\frac{t-d}{t}\frac{t-n}{t-1}}{n^2\alpha^2} \leqslant \frac{t-n}{4n\alpha^2(t-1)}.$$

   On cherche donc $n$ tel que $\frac{t-n}{4n\alpha^2(t-1)} \leqslant \beta$. Ce qui revient à dire $n \geqslant \frac{t}{1+4\alpha^2\beta(t-1)}$. On pourra prendre alors la partie entière supérieure de $\frac{t}{1+4\alpha^2\beta(t-1)}$ comme taille d'échantillon minimale si cette quantité ne dépasse pas $t$. Cela arrive dès que $\alpha^2\beta > \frac{1}{4}$.

7. Nous voulons étudier le comportement de la loi de $X$ lorsque $t$ est très grand. Supposons $n$ et $p = \frac{d}{t}$ fixés. Notons $X_t$ la variable correspondant au nombre d'allumettes défectueuses dans un échantillon choisi au hasard dans une population de $t$ allumettes contenant une proportion $p$ d'allumettes défectueuses. Montrer que lorsque $t$ tend vers l'infini, la loi de $X_t$ tend vers une loi usuelle dont on précisera les paramètres.

Considérons $k$ un entier naturel fixé, alors en explicitant les coefficients binomiaux, on peut déjà obtenir :

$$\mathbb{P}(X_t = k) = \frac{\binom{pt}{k}\binom{(1-p)t}{n-k}}{\binom{t}{n}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(pt-j)\prod_{j=0}^{n-k-1}((1-p)t-j)}{\prod_{j=0}^{n-1}(t-j)}.$$

On factorise alors dans chaque facteur de la dernière fraction par son coefficient dominant

$$\mathbb{P}(X_t = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(1-\frac{j}{pt})\prod_{j=0}^{n-k-1}(1-\frac{j}{(1-p)t})}{\prod_{j=0}^{n-1}(1-\frac{j}{t})}.$$

La dernière fraction converge vers 1 comme produit fini de facteurs tendant vers 1. En conclusion, la loi limite est la loi binomiale de paramètres $n$ et $p = \frac{d}{t}$.

## Exercice 6

Soit $E$ un espace euclidien, $p$ un projecteur orthogonal de $E$. Pour rappel, un endomorphisme $f$ est dit symétrique si pour tout couple $(x, y)$ de $E$,

$$\langle x, f(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle.$$

1. Montrer que si $p$ est un projecteur orthogonal, alors $p$ est un endomorphisme symétrique.
   Soient $x, y \in E$, par définition du projeté orthogonal et bilinéarité du produit scalaire :
   $$\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), y - p(y) + p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle + \langle p(x), y - p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle.$$
   On montre de même que $\langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$. Ainsi $p$ est symétrique.
2. Soit $q$ un autre projecteur orthogonal de $E$. Montrer que $p \circ q \circ p$ est symétrique.
   En utilisant le résultat précédent pour $p$ et $q$ :
   $$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle p \circ q \circ p(x), y\rangle = \langle q \circ p(x), p(y)\rangle = \langle p(x), q \circ p(y)\rangle = \langle x, p \circ q \circ p(y)\rangle.$$
3. Pour cette question seulement, on se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et on note $(e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique : soit $p$ la projection orthogonale sur la droite engendrée par $e_1$ et $q$ la projection orthogonale sur la droite engendrée par $e_1 + e_2$. Calculer $p \circ q(e_1)$. L'application $p \circ q$ est-elle une projection ?
   En décomposant $e_1 = \frac{e_1+e_2}{2} + \frac{e_1-e_2}{2}$, on peut alors écrire $q(e_1) = \frac{e_1+e_2}{2}$, ainsi $p \circ q(e_1) = \frac{e_1}{2}$, et donc par linéarité $p \circ q \circ p \circ q(e_1) = \frac{e_1}{4}$. Ceci nous permet d'affirmer que $p \circ q$ n'est pas une projection.
4. Montrer que $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)^{\perp} = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$.
   Pour démontrer l'égalité, montrons la double inclusion.
   Soit $x \in (\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)^{\perp}$, alors pour tout $y \in E$ et $z \in \operatorname{Ker} q$,
   $$\langle x, p(y) + z\rangle = 0,$$

ce qui implique, en posant $z = 0$, $x \in (\operatorname{Im} p)^{\perp} = \operatorname{Ker} p$. De plus, pour $y = 0$, on aboutit à $x \in (\operatorname{Ker} q)^{\perp} = \operatorname{Im} q$. Ainsi $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)^{\perp} \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$.

Considérons maintenant un élément quelconque $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$, alors $p(x) = 0$ et il existe $w \in E$, tel que $x = q(w)$, et $p \circ q(w) = p(x) = 0$. Ainsi, pour tout $y \in E$ et $z \in \operatorname{Ker} q$, en utilisant le fait que $q$ soit symétrique :

$$\begin{aligned} \langle x, p(y) + z \rangle &= \langle q(w), p(y) + z \rangle = \langle w, q \circ p(y) + q(z) \rangle \\ &= \langle w, q \circ p(y) \rangle = \langle x, p(y) \rangle \\ &= \langle p(x), y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Ceci nous permet d'obtenir la seconde inclusion. L'égalite est ainsi démontrée.

5. Montrer alors que $\operatorname{Im} p \circ q = \operatorname{Im} p \circ q \circ p$.

   Clairement, $\operatorname{Im} p \circ q \circ p \subset \operatorname{Im} p \circ q$. Utilisons la question 3. pour la deuxième inclusion :

$$E = (\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q) \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q)\,.$$

   Ainsi pour $y \in E$, il existe des éléments $u \in \operatorname{Im} p, v \in \operatorname{Ker} q, w \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$, tels que

$$y = u + v + w \text{ et } \langle u + v, w \rangle = 0.$$

   Remarquons alors que $q(w) = w$ et donc $p \circ q(w) = 0$, de plus $p(u) = u$. Ainsi pour tout $x \in \operatorname{Im} p \circ q$, on peut écrire

$$x = p \circ q(y) = p \circ q(u + v + w) = p \circ q(u) + \underbrace{p \circ q(v)}_{=0} + \underbrace{p \circ q(w)}_{=0} = p \circ q \circ p(u).$$

6. Montrer que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans [0,1].

   L'endomorphisme $p \circ q \circ p$ est symétrique réel, donc diagonalisable à l'aide d'une base orthogonale de vecteurs propres réels, de valeurs propres réelles d'après le théorème spectral. Ce qui signifie que $E$ est égale à la somme orthogonale des sous-espaces propres de $p \circ q \circ p$ :

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(p \circ q \circ p)}} E_{\lambda}(p \circ q \circ p),$$

   où $\operatorname{Sp}(p \circ q \circ p)$ désigne le spectre de l'endomorphisme $p \circ q \circ p$, et $E_{\lambda}(p \circ q \circ p)$ le sous-espace propre associée à la valeur propre $\lambda$. De plus, pour tout $y \in E$, $\langle y, q(y) \rangle = \langle q(y), q(y) \rangle \geqslant 0$. Ainsi pour $x$ vecteur propre associé à $\lambda \neq 0$ pour $p \circ q \circ p$,

$$0 < \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \langle p \circ q \circ p(x), \lambda x \rangle = \lambda \langle p(x), q \circ p(x) \rangle.$$

   Par positivité du dernier facteur, on en déduit que $\lambda > 0$. Montrons maintenant que les valeurs propres sont plus petites que 1 avec les mêmes hypothèses sur $x$. Pour cela, on utilise le fait que la norme d'un projeté orthogonal d'un vecteur $v$ est inférieure ou égale à la norme de $v$ :

$$0 < \lambda^2 \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda \langle p(x), q \circ p(x) \rangle = \lambda \langle q \circ p(x), q \circ p(x) \rangle \leqslant \lambda \langle p(x), p(x) \rangle \leqslant \lambda \langle x, x \rangle.$$

   En conclusion $\operatorname{Sp}(p \circ q \circ p) \subset [0, 1]$.

7. Montrer que les sous-espaces propres $E_\lambda$ associés aux valeurs propres non-nulles $\lambda$ de $p \circ q \circ p$ sont aussi ceux de $p \circ q$.

   Tout vecteur propre associé à une valeur propre non-nulle de $p \circ q \circ p$ est vecteur propre pour la même valeur propre de $p \circ q$ et réciproquement. En effet, si $x$ est un vecteur propre pour $p \circ q \circ p$ associé à $\lambda$, alors $x = \frac{1}{\lambda} p \circ q \circ p(x) = p \circ q \circ p(\frac{x}{\lambda}) \in \operatorname{Im} p$. Par conséquent $p(x) = x$, ainsi

   $$p \circ q(x) = p \circ q \circ p(x) = \lambda x.$$

   Ainsi $x$ est vecteur propre pour $p \circ q$ associé à $\lambda$. Considérons alors un vecteur propre $x$ de $p \circ q$ associé à $\lambda \neq 0$, alors on montre de même que $p(x) = x$ et ainsi que $p \circ q \circ p(x) = p \circ q(x) = \lambda x$. En particulier les sous-espaces propres associés sont les mêmes.

8. Montrer alors que $p \circ q$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans [0,1].

   Il nous reste alors à vérifier que la somme orthogonale des sous-espaces propres associées au valeurs propres non-nulles est en somme directe avec le noyau pour conclure que l'endomorphisme est diagonalisable.

   • Pour $p$ non-trivial la dimension de son noyau est non-nulle ce qui implique que celle du noyau de $p \circ q \circ p$ est non-nulle également, dit autrement 0 est valeur propre de $p \circ q \circ p$. En isolant la valeur propre 0 des autres,

   $$E = \operatorname{Ker} p \circ q \circ p \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} p \circ q \circ p,$$

   car $\operatorname{Im} p \circ q \circ p = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(p \circ q \circ p), \lambda > 0}} E_\lambda(p \circ q \circ p)$. L'endomorphisme étant diagonalisable, en considérant une base de vecteurs propres $(v_{\lambda,k})_{\lambda \in \operatorname{Sp}(p \circ q \circ p), 1 \leqslant k \leqslant m_\lambda}$, leurs images engendrent alors $\operatorname{Im} p \circ q \circ p$, pour obtenir la seconde inclusion il suffit de décomposer un élément $x$ de la somme :

   $$x = \sum_{\lambda > 0, 1 \leqslant k \leqslant m_\lambda} v_{\lambda,k} = \sum_{\lambda > 0, 1 \leqslant k \leqslant m_\lambda} \frac{1}{\lambda} p \circ q \circ p(v_{\lambda,k}) \in \operatorname{Im} p \circ q \circ p.$$

   • Maintenant montrons que $\operatorname{Ker} p \circ q \oplus \operatorname{Im} p \circ q = E$. Soit $x$ dans l'intersection, alors il est dans l'image de $p$ ainsi $x = p(x)$ et donc $p \circ q(x) = p \circ q \circ p(x) = 0$, vu que $\operatorname{Im} p \circ q = \operatorname{Im} p \circ q \circ p$, $x$ est alors dans l'intersection des image et noyau de $p \circ q \circ p$, or ces deux espaces sont en somme orthogonale. Ainsi $\operatorname{Ker} p \circ q$ et $\operatorname{Im} p \circ q$ sont en somme directe, et d'après le théorème du rang, les deux espaces sont même supplémentaires.

   • En conclusion,

   $$E = \operatorname{Ker} p \circ q \oplus \operatorname{Im} p \circ q = \operatorname{Ker} p \circ q \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(p \circ q \circ p)}} E_\lambda,$$

   les sous-espaces propres sont en somme directe, de somme égale à $E$, en conclusion, $p \circ q$ est diagonalisable de même spectre que $p \circ q \circ p$ inclus dans $[0, 1]$.

**FEUILLE DE RÉPONSES**

**COMPOSITION D'ANGLAIS**

**Concours ISE Option Mathématiques**

Centre d'examen : CORRECTION

Nom et prénom : CORRECTION

Date de naissance :

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 4 |
| 5 | 5 | 5 |
| 6 | 6 | 6 |
| 7 | 7 | 7 |
| 8 | 8 | 8 |
| 9 | 9 | 9 |

← **Codez votre numéro de candidat ci-contre**

Par exemple, pour le numéro 8, noircir les cases 008 de la façon suivante : 0 dans la première colonne, 0 dans la seconde et 8 dans la troisième.

**Attention :** les cases doivent être noircies et non simplement cochées.
Exemple de case **bien noircie** : ■
Exemples de cases non ou **mal noircies** : ☐ ☑ ☒

---

Pour chaque question, noircir avec soin la bonne réponse. En cas d'erreur, utiliser du blanc correcteur pour effacer complètement la case cochée à tort (ne pas tenter de redessiner la case après effacement).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| QUESTION 01 : | a | b | c | ■ |
| QUESTION 02 : | a | ■ | c | d |
| QUESTION 03 : | a | b | c | ■ |
| QUESTION 04 : | a | ■ | c | d |
| QUESTION 05 : | a | b | ■ | d |
| QUESTION 06 : | ■ | b | c | d |
| QUESTION 07 : | ■ | b | c | d |
| QUESTION 08 : | a | ■ | c | d |
| QUESTION 09 : | ■ | b | c | d |
| QUESTION 10 : | ■ | b | c | d |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| QUESTION 11 : | a | ■ | c | d |
| QUESTION 12 : | a | ■ | c | d |
| QUESTION 13 : | a | b | c | ■ |
| QUESTION 14 : | a | b | ■ | d |
| QUESTION 15 : | a | b | c | ■ |
| QUESTION 16 : | a | b | ■ | d |
| QUESTION 17 : | a | b | c | ■ |
| QUESTION 18 : | a | ■ | c | d |
| QUESTION 19 : | ■ | b | c | d |
| QUESTION 20 : | a | b | c | ■ |

Question 21 : a b ■ d
Question 22 : a b ■ d
Question 23 : a ■ c d
Question 24 : a ■ c d
Question 25 : a ■ c d
Question 26 : a b c ■
Question 27 : ■ b c d
Question 28 : ■ b c d
Question 29 : a b ■ d
Question 30 : a ■ c d

Question 31 : a b ■ d
Question 32 : a ■ c d
Question 33 : a b ■ d
Question 34 : a ■ c d
Question 35 : ■ b c d
Question 36 : a ■ c d
Question 37 : a ■ c d
Question 38 : a b ■ d
Question 39 : ■ b c d
Question 40 : a b c ■

Question 41 : a ■ c d
Question 42 : a ■ c d
Question 43 : a b ■ d
Question 44 : a b ■ d
Question 45 : a ■ c d
Question 46 : a ■ c d
Question 47 : a b ■ d
Question 48 : ■ b c d

Question 49 : a b c ■
Question 50 : ■ b c d

Question 51 : a b c ■
Question 52 : a b ■ d
Question 53 : a ■ c d
Question 54 : a b ■ d
Question 55 : a b ■ d
Question 56 : a b c ■
Question 57 : a ■ c d
Question 58 : a ■ c d
Question 59 : a b ■ d
Question 60 : ■ b c d

Question 61 : a b c ■
Question 62 : a ■ c d
Question 63 : a b ■ d
Question 64 : ■ b c d
Question 65 : a b c ■
Question 66 : a ■ c d
Question 67 : a ■ c d
Question 68 : ■ b c d
Question 69 : ■ b c d
Question 70 : a b ■ d

Question 71 : ■ b c d
Question 72 : a b ■ d
Question 73 : a b ■ d
Question 74 : a ■ c d
Question 75 : a b ■ d