ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2026

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Faut-il imposer des limites à la recherche ? Répondez en argumentant.

Sujet n° 2

Peut-on perdre son humanité ? Définissez et répondez à la question.

Sujet n° 3

Selon Clausewitz (1780-1831), officier et théoricien militaire prussien, la guerre est la continuation de la politique par d'autres moyens. Qu'en pensez-vous ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2026

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'Analyse

Introduction

Pour tout réel $x > -1$, on considère la série

$$g(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

On note, pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\zeta(k) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^k},$$

la fonction Zéta de Riemann qui converge pour tout $k \geqslant 2$.

Le but de ce problème est d'étudier la fonction g : domaine de définition, régularité, développement limité en 0 à tout ordre, expression intégrale, comportement aux bornes de son ensemble de définition. Les parties **A**, **B**, **C** et **D** sont indépendantes.

Partie A — Convergence et premières propriétés de g

A.1. Montrer que g est définie sur $]-1;+\infty[$.

A.2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition et donner, pour tout entier k et tout réel $x > -1$, une expression de $g^{(k)}(x)$ sous la forme d'une série.

A.3. Soit $m \in \mathbb{N}$. Donner un développement limité de g à l'ordre m en 0. On exprimera les coefficients de ce développement en fonction des valeurs prises par la fonction ζ définie dans l'introduction.

Partie B - Equivalents de g aux bornes de son ensemble de définition.

B.1. a) Montrer que, pour tout $x > 0$, pour tout entier strictement positif k,

$$\frac{1}{(k+1+x)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{(t+x)^2} \leqslant \frac{1}{(k+x)^2}.$$

b) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{1+x} \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x}.$$

c) Déterminer un équivalent simple de g en $+\infty$.

B.2. Déterminer un équivalent simple de g en -1.

Partie C — Une représentation intégrale de g.

C.1. Montrer que, pour tout réel $\alpha > 0$,

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(-\ln t)\,dt \ \text{ converge et } \int_0^1 t^{\alpha-1}(-\ln t)\,dt = \frac{1}{\alpha^2}.$$

C.2. Montrer que pour tout $x > -1$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 t^{\,n+x-1}(-\ln t)\,dt.$$

C.3. En déduire une expression intégrale de $g(x)$, autrement dit, déterminer une fonction $h(x,t)$ telle que

$$g(x) = \int_0^1 h(x,t)\,dt.$$

Partie D - Développement asymptotique de g en $+\infty$.

Dans la question **B.1**, on a trouvé un équivalent de g en $+\infty$. Le but de cette partie est de trouver le deuxième terme du développement asymptotique de g en $+\infty$. On note $E(t)$ la partie entière de t. On considère $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

D.1. On définit les polynômes de Bernoulli comme l'unique suite de polynômes telle que :

- $B_0 = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, B'_{n+1} = (n+1)B_n$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(x)dx = 0$.

a) Déterminer B_1 et B_2.

b) On pose pour le reste du problème $\widetilde{B_1}(t) = B_1(t - E(t))$ et $\widetilde{B_2}(t) = B_2(t - E(t))$. Montrer que $\widetilde{B_1}$ et $\widetilde{B_2}$ sont 1-périodiques et continues.

D.2. Montrer que pour tout entier strictement positif k,

$$\int_k^{k+1} \widetilde{B_1} f' = \frac{1}{2}\left(f(k+1) + f(k)\right) - \int_k^{k+1} f.$$

D.3. En déduire que pour tout entier $N \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{N} f(k) = \int_1^N (f) + \frac{1}{2}\left(f(1) + f(N)\right) + \int_1^N \widetilde{B_1} f'.$$

D.4. Montrer que $\widetilde{B_2}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et que sur cet ensemble, $\widetilde{B_2}' = 2\widetilde{B_1}$. En déduire que,

$$\int_k^{k+1} \widetilde{B_1} f' = \frac{1}{12}\big(f'(k+1) - f'(k)\big) - \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \widetilde{B_2} f''.$$

D.5. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{N} f(k) = \int_1^N (f) + \frac{1}{2}\left(f(1) + f(N)\right) + \frac{1}{12}\big(f'(N) - f'(1)\big) - \frac{1}{2}\int_1^N \widetilde{B_2} f''.$$

D.6. Soit $x > -1$. On considère la fonction f_x définie sur $[1, +\infty[$ par $f_x(t) = \frac{1}{(t+x)^2}$. Montrer que,

$$\int_1^{+\infty} \widetilde{B_2} f_x'' \text{ converge et que } \int_1^{+\infty} \widetilde{B_2} f_x'' = \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

D.7. En utilisant les deux questions **D.5** et **D.6**, déterminer des constantes réelles a et b telles que,

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

2 Problème d'Algèbre

Le but de ce problème est de démontrer et d'appliquer deux théorèmes de diagonalisation simultanée. Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A : diagonalisation simultanée.

Notations et présentation de la partie A.

- $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
- $\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et l'application identité de E est noté Id_E.
- Si F est un sous espace vectoriel de E et si $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit que F est stable par f si $f(F) \subset F$, et on note alors $f_{|F}$ la restriction de f à F.
- Deux endomorphismes f et g commutent si $f \circ g = g \circ f$.
- Si λ est une valeur propre d'un endomorphisme f, on notera E_λ^f le sous espace propre associé ou simplement E_λ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'endomorphisme en question.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'algèbre des matrices carrées de taille n et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ désigne le groupe constitué des matrices inversibles.
- $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ désigne la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont dans cet ordre λ_1, λ_2,$\cdots$,λ_n.

Le but de cette partie est de montrer et d'appliquer le théorème de diagonalisation simultanée suivant :

Théorème I : Si f et g sont deux endomorphismes de E diagonalisables et qui commutent, alors il existe une base commune de diagonalisation, autrement dit, il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ soient des matrices diagonales.

A.1. Préliminaires : soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Dans cette question nous démontrons les deux résultats de cours suivants :

- f est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ simplement scindé tel que $P(f) = 0$.
- La restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous espace stable est diagonalisable.

a) Supposons f diagonalisable et notons $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres de f deux à deux distinctes. Montrer que le polynôme $P(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$ vérifie $P(f) = 0$.

b) Réciproquement, soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts tel que le polynôme simplement scindé $P(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$ soit un polynôme annulateur de f. Montrer que f est diagonalisable.

c) Soit F un sous espace vectoriel de E stable par f, déduire des questions précédentes que si f est diagonalisable, alors $f_{|F}$ est diagonalisable.

A.2. Preuve du théorème I : soient f et g deux endomorphismes diagonalisables qui commutent.

a) Montrer que si λ est une valeur propre de f, alors E_λ^f est stable par g.

b) En déduire le théorème I.

A.3. Application 1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable sur $\mathbb{K}$. Le but de cette question est de montrer que l'application $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ définie par $f_A(M) = AMA + MA$ est diagonalisable.

a) Vérifier que f_A est linéaire.

b) Notons g_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $g_A(M) = AM$. Montrer que si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $g_{P(A)} = P(g_A)$.

c) Montrer que g_A est diagonalisable.

On considère également l'endomorphisme d_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $d_A(M) = MA$ et, comme le raisonnement est analogue, on admet que d_A est diagonalisable.

d) Montrer que g_A et d_A commutent.

e) Conclure.

A.4. Application 2 : Soit p un entier positif impair et $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{X^k}{k}$. Le but de cette question est de montrer que si A et B sont deux matrices à coefficients réels diagonalisables dans $\mathbb{R}$ et si $P(A) = P(B)$ alors $A = B$.

a) Montrer que la fonction polynômiale $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective.

b) Soient $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S \in \mathbb{R}[X]$ et $W \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer en détaillant que :

$$S(D) = \operatorname{diag}(S(\alpha_1), \cdots, S(\alpha_n)) \text{ et } S(WDW^{-1}) = WS(D)W^{-1}.$$

c) Soient $(x_1, \cdots x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ tous distincts et $(y_1, \cdots, y_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$. Montrer que le polynôme $Q(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} y_i \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\ell} \frac{t - x_j}{x_i - x_j} \right)$ vérifie $Q(x_k) = y_k$ pour tout $k \in [\![1, \ell]\!]$.

Soient A et B deux matrices à coefficients réels diagonalisables dans $\mathbb{R}$ et telles que $P(A) = P(B)$. D'après le théorème I, il existe donc deux matrices U, V dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ainsi que deux matrices diagonales $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et $\Delta = \operatorname{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$U^{-1}AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = D \text{ et } V^{-1}BV = \operatorname{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n) = \Delta.$$

Il existe également, d'après la question **A.4**.c), un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(P(\mu_i)) = \mu_i$.

d) Montrer qu'il existe un polynôme R tel que $R(B) = A$.

e) En déduire que A et B commutent.

f) Conclure.

Partie B : diagonalisation simultanée des matrices symétriques.

Notations et présentation de la partie B.

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice A^T désigne sa transposée.
- On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
$$X^T A X > 0.$$
- $\mathcal{S}_n$ est le sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques et $\mathcal{S}_n^{++}$ désigne l'ensemble constitué des matrices symétriques définies positives.
- On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- La matrice d'un produit scalaire φ de $\mathbb{R}^n$ dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est notée :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) := (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Le but de cette partie est de montrer et d'appliquer le théorème de diagonalisation simultanée suivant :

Théorème II : Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $B \in \mathcal{S}_n$. Alors, il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{R})$ tel que
$$A = P^T I_n P = P^T P \text{ et } B = P^T D P.$$

B.1. Preuve du théorème II : Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $B \in \mathcal{S}_n$. Notons φ le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour φ et notons enfin $Q = Q_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$.

a) Donner une relation entre Q et A.

b) Notons $C = Q^T B Q$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale R et une matrice diagonale D telles que,
$$R^T D R = C.$$

c) Déterminer une matrice P telle que,
$$A = P^T P \text{ et } B = P^T D P.$$

B.2. Application : Soient $(A, B) \in (\mathcal{S}_n^{++})^2$. Le but de cette question est d'utiliser le théorème II pour démontrer l'inégalité suivante :
$$(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geqslant \det(A)^{\frac{1}{n}} + \det(B)^{\frac{1}{n}}. \tag{1}$$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On rappelle que, par définition, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si pour tous $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$,
$$f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant t f(x) + (1-t) f(y).$$

a) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ et pour tous réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vérifiant $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

b) Montrer que la fonction $x \mapsto h(x) = \ln(1 + e^x)$ est convexe puis que pour tous réels strictement positifs $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i)^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{\frac{1}{n}}.$$

c) Montrer l'inégalité (1).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2026

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve est constituée de six exercices indépendants à traiter dans un ordre quelconque. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Notations

Dans tout le sujet, nous utiliserons les notations suivantes :

• i désigne l'unique nombre complexe tel que $e^{i\pi} = -1$.

• $\mathbb{E}[X]$ désigne l'espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle X.

• $V(X)$ désigne la variance mathématique d'une variable aléatoire réelle X.

• $M_{p,q}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

• Pour une matrice $M \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, on notera M^T la matrice transposée de M.

• Pour tout sous-espace F d'un espace euclidien E, $F^{\perp}$ désigne le supplémentaire orthogonal de F dans E et le produit scalaire de deux vecteurs x et y de F sera noté $\langle x, y \rangle$.

Exercice 1

Soient $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}\, a_{n-1}$. Nous nous intéressons à la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.
2. (a) Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$. On note $S(x)$ sa somme.
   (b) Montrer que $S(x)$ est solution de $y' = \frac{1+2x}{1-x} y$.
   (c) En déduire une expression de $S(x)$.

Exercice 2

Considérons f et g les fonctions définies par

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f^2 + g$ est constante sur $\mathbb{R}$ et déterminer la valeur de la constante.
3. Déduire des questions précédentes la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
4. En déduire que l'intégrale $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt$ vaut 1.
5. Considérons la fonction φ suivante :

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

   (a) Montrer que φ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Exprimer $\varphi'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.
   (c) En déduire l'expression de $\varphi(x)$.

Exercice 3

Une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists M \in \mathbb{N}, \ \forall n, p \geqslant M, \quad \|u_n - u_p\| \leqslant \varepsilon.$$

1. Montrer que toute suite convergente d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ est de Cauchy.

Dans la suite de l'exercice, $E = \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ est l'ensemble des fonctions continues de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$. On notera 0_E la fonction identiquement nulle de E. On définit enfin l'application N de E dans $\mathbb{R}^+$ par

$$N(f) = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}.$$

2. (a) Démontrer pour tous nombres complexes u et v l'inégalité $|uv| \leqslant \frac{|u|^2}{2} + \frac{|v|^2}{2}$ et en déduire que pour toutes fonctions $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)| dx \leqslant \frac{\lambda^2}{2} N(f)^2 + \frac{1}{2\lambda^2} N(g)^2.$$

   (b) En déterminant le minimum de la fonction $h\colon \lambda \mapsto \frac{\lambda^2}{2} N(f)^2 + \frac{1}{2\lambda^2} N(g)^2$, montrer l'inégalité

$$\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)| dx \leqslant N(f)N(g).$$

   (c) En déduire que N est une norme sur E.
3. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de E donnée par $g_n(x) = e^{inx}$. Montrer que $N(g_n - g_p) = 2\sqrt{\pi}$.
4. En déduire que la boule fermée centrée en 0_E, de rayon 1 pour la norme N n'est pas compacte.

Exercice 4

Dans ce problème d'estimation, on dispose de n ($n \geqslant 2$) observations indépendantes $(X_1, \dots, X_n)$ de même loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$ inconnu. On souhaite estimer $e^{-\theta}$.

Pour rappel, X suit une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}.$$

On dit que $\hat{\lambda}$ est un estimateur sans biais d'une quantité λ si $\hat{\lambda}$ est une variable aléatoire fonction de l'échantillon, c'est à dire $\hat{\lambda} = f(X_1, \dots, X_n)$ pour une certain fonction f, et si $\mathbb{E}[\hat{\lambda}] = \lambda$. Pour deux estimateurs sans biais de λ, on préfèrera celui dont la variance est la plus petite.

On définit, pour $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire Y_i par

$$\begin{cases} Y_i = 1, \text{ si } X_i = 0, \\ Y_i = 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

On note enfin $\overline{Y}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1. Calculer l'espérance et la variance de $\overline{Y}_n$.
2. Soit, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$. On définit $\varphi_n(j) = \mathbb{P}_{S_n = j}(X_n = 0)$ la probabilité conditionnelle de $\{X_n = 0\}$ sachant $\{S_n = j\}$.
   (a) Montrer que S_k suit une loi de Poisson de paramètre $k\theta$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel j, $\varphi_n(j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j$.

La valeur $\varphi_n(j)$ étant indépendante de θ, on s'intéresse à l'estimateur $\varphi_n(S_n)$.

3. Calculer l'espérance et la variance de $\varphi_n(S_n)$.
4. Montrer que $1 \leqslant \frac{e^\theta - 1}{\theta} \leqslant e^\theta$ et en déduire que la fonction h donnée par $h(\theta) = \frac{e^\theta - 1}{\theta}$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
5. Montrer enfin que $V(\varphi_n(S_n)) \leqslant V(\overline{Y}_n)$. Interpréter le résultat au regard du problème d'estimation considéré.

Exercice 5

Considérons une production industrielle d'allumettes. A la fin d'une journée donnée, on souhaiterait évaluer la proportion d'allumettes défectueuses sur le total des t allumettes produites. On notera d le nombre d'allumettes défectueuses. Le tirage aléatoire d'un échantillon de n allumettes parmi les t disponibles est effectué, et chacune d'entre elles est grattée pour vérifier si elle s'allume ou pas. C'est le seul critère de conformité considéré ici. On suppose $t \geqslant d \geqslant 2$.

1. En considérant le polynôme $P(X) = (1 + X)^{k+\ell}$, démontrer la formule de Vandermonde :

$$\binom{k+\ell}{m} = \sum_{j=0}^{m} \binom{k}{j}\binom{\ell}{m-j}.$$

2. Montrer que la loi de la variable aléatoire X correspondant au nombre d'allumettes défectueuses dans le prélèvement est donnée par

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{d}{k}\binom{t-d}{n-k}}{\binom{t}{n}}.$$

3. Montrer la relation suivante : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k\binom{d}{k} = d\binom{d-1}{k-1}$.
4. Déduire des questions précédentes que l'espérance $\mathbb{E}[X]$ vaut $n\frac{d}{t}$.

On admet que la variance de X est donnée par $n\frac{d}{t}\frac{t-d}{t}\frac{t-n}{t-1}$.

5. Montrer que pour tout $x \in [0,1],\ x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.
6. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, en supposant $\alpha, \beta \in [0,1]$ fixés, sachant aussi que $p = \frac{d}{t}$ est inconnu, établir une taille suffisante n de l'échantillon, fonction de α, β et t, pour assurer le contrôle d'erreur d'estimation suivant :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{d}{t}\right| \geqslant \alpha\right) \leqslant \beta.$$

7. Nous voulons étudier le comportement de la loi de X lorsque t est très grand. Supposons n et $p = \frac{d}{t}$ fixés. Notons X_t la variable correspondant au nombre d'allumettes défectueuses dans un échantillon choisi au hasard dans une population de t allumettes contenant une proportion p d'allumettes défectueuses. Montrer que lorsque t tend vers l'infini, la loi de X_t tend vers une loi usuelle dont on précisera les paramètres.

Exercice 6

Soit E un espace euclidien, p un projecteur orthogonal de E. Pour rappel, un endomorphisme f est dit symétrique si pour tout couple (x, y) de E,

$$\langle x, f(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle.$$

1. Montrer que si p est un projecteur orthogonal, alors p est un endomorphisme symétrique.
2. Soit q un autre projecteur orthogonal de E. Montrer que $p \circ q \circ p$ est symétrique.
3. Pour cette question seulement, on se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et on note (e_1, e_2, e_3) sa base canonique : soit p la projection orthogonale sur la droite engendrée par e_1 et q la projection orthogonale sur la droite engendrée par $e_1 + e_2$. Calculer $p \circ q(e_1)$. L'application $p \circ q$ est-elle une projection ?
4. Montrer que $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)^{\perp} = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$.
5. Montrer alors que $\operatorname{Im} p \circ q = \operatorname{Im} p \circ q \circ p$.
6. Montrer que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans [0,1].
7. Montrer que les sous-espaces propres E_λ associés aux valeurs propres non-nulles λ de $p \circ q \circ p$ sont aussi ceux de $p \circ q$.
8. Montrer alors que $p \circ q$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans [0,1].

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2026

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'essai ci-après a été écrit par Udi V. Philippa, Scientifique de l'espace et de la robotique à l'Agence spatiale du Nigéria, et a été publié dans la revue de l'Union africaine UAECHO, édition 2024.

L'article compte 1060 mots.

Il doit être résumé en* 170 *mots (à strictement 17 mots près). Vous placerez une barre (/) tous les 30 mots et indiquerez le nombre de mots total en fin de copie. Le non-respect du nombre de mots est sanctionné par un 0/20.

Attention : chaque signe vaut 1 mot (l' = 1 mot) !

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.

Les filles et les femmes africaines dans la robotique spatiale grâce à l'éducation du 21e siècle

La robotique spatiale, la science et la technologie en tant que modèle d'éducation sont essentielles pour le développement socio-économique de l'Afrique. Il est essentiel d'exploiter le potentiel des filles africaines, qui sont les futures dirigeantes, et de créer une voie d'opportunités dans les technologies de pointe pour le développement des compétences nécessaires à l'Afrique que nous voulons au 21e siècle, alors que le continent est à l'aube d'une transformation significative de l'exploration et de la technologie spatiales.

LE RÔLE DE LA STRATÉGIE CONTINENTALE DE L'ÉDUCATION POUR L'AFRIQUE 2016-2025 (CESA 16-25), DE L'AGENDA 2063, DES TRAITÉS DE L'UNION AFRICAINE ET DE LA STRATÉGIE POUR L'ÉGALITÉ DES SEXES ET L'AUTONOMISATION DES FEMMES (GEWE)

La CESA 16-25, l'Agenda 2063[1], divers traités de l'Union africaine, la Stratégie de GEWE et d'autres initiatives visionnaires de l'Union africaine, visent à réorganiser l'éducation, à stimuler le développement continental, à fournir le cadre juridique pour le progrès et à faire progresser l'égalité des sexes. Tous mettent fortement l'accent sur une éducation inclusive, tout au long de la vie, de qualité et pertinente, qui favorise le progrès économique et garantit l'égalité des chances pour les femmes.

La robotique spatiale englobe la création, l'assemblage, l'exploitation et le déploiement de systèmes robotiques pour l'exploration et les activités spatiales. Ces systèmes sont indispensables pour des tâches telles que le déploiement de satellites, la maintenance et l'exploration de l'espace.

En ce qui concerne le développement de l'Afrique, la robotique spatiale joue un rôle essentiel dans l'avancement des capacités technologiques et la résolution de divers défis. Son application peut renforcer les télécommunications, améliorer la surveillance météorologique et améliorer la gestion des ressources, contribuant ainsi au développement durable. En outre, l'intégration de la robotique dans les projets spatiaux permet de participer à des initiatives spatiales mondiales, de favoriser la collaboration internationale et d'offrir aux pays africains des possibilités de recherche scientifique, d'innovation technologique et de développement des compétences dans les domaines émergents. Alors que les pays africains continuent d'investir dans les programmes spatiaux, l'intégration de la robotique les positionne à l'avant-garde de l'exploration spatiale, débloquant les avantages socio-économiques associés.

Les Cadres continentaux et Traités de l'UA visent à relever les défis persistants dans le secteur de l'éducation en Afrique. Ils reconnaissent l'importance de l'accès à une éducation de qualité pour tous, une préoccupation cruciale sur un continent où de nombreuses personnes n'ont toujours pas accès à l'école. En outre, les stratégies mettent en évidence les disparités entre les sexes dans l'enseignement des sciences, de la technologie, de l'ingénierie et des mathématiques (STEM) et cherchent à créer un environnement d'apprentissage plus équitable. Ils soulignent également la nécessité de rendre l'éducation plus pertinente dans le paysage mondial en évolution rapide tout en plaidant pour l'égalité des sexes.

OPPORTUNITÉS DANS LE DOMAINE DE LA ROBOTIQUE SPATIALE

L'industrie spatiale africaine en pleine croissance présente de vastes opportunités pour le continent. Avec l'augmentation des investissements et l'intérêt naissant pour l'exploration spatiale, la demande d'experts dans des domaines tels que la robotique spatiale augmente. Les cadres de l'UA mentionnés dans cet article visent à renforcer les investissements dans l'industrie spatiale en mettant l'accent sur la qualité et l'éducation pertinente et en créant une relation synergique entre les objectifs des stratégies et les aspirations de l'industrie spatiale.

[1] *L'agenda 2063 constitue la feuille de route pour le développement durable du continent d'ici 2063.*

En outre, la Stratégie de l'UA pour la science, la technologie et l'innovation en Afrique (STISA-2024) reconnaît la demande d'experts pour positionner la science et la technologie comme transformatrices, en harmonie avec le Programme phare de l'Agenda 2063 sur la stratégie spatiale. Cela souligne l'engagement de l'UA en faveur d'un développement holistique, de la résolution des défis et du renforcement de l'utilisation de l'espace extra-atmosphérique par l'Afrique. La Stratégie spatiale africaine à l'horizon 2063 de l'Agenda 2063, un projet prioritaire, vise à renforcer les capacités de développement de l'Afrique dans l'espace. L'intégration de la science et de la technologie dans STISA-2024 répond au besoin de professionnels qualifiés, positionnant l'Afrique pour une participation active à l'exploration spatiale, à l'innovation technologique et au développement socio-économique. Ce potentiel de transformation s'étend au-delà de l'espace, formant un cadre cohérent pour la trajectoire de l'Afrique au XXIe siècle, renforçant l'importance de la stratégie spatiale de l'UA pour le développement du continent.

DISPARITÉS ENTRE LES SEXES DANS LES SCIENCES, LA TECHNOLOGIE, L'INGÉNIERIE, LES MATHÉMATIQUES (STEM) ET LA ROBOTIQUE SPATIALE

Les disparités entre les sexes dans les STEM, y compris la robotique spatiale, sont un problème de longue date. Les cadres continentaux de l'UA s'attaquent à ce problème en soulignant l'importance de l'égalité des sexes dans l'éducation. Ils reconnaissent les obstacles culturels et sociétaux qui ont limité les filles et les femmes dans les domaines des STEM et s'engagent à remédier à ces disparités. Les cadres de l'UA jouent un rôle central dans la lutte contre les disparités entre les sexes dans les STEM et la robotique spatiale et mettent l'accent sur l'éducation inclusive STEM, la littératie numérique[2], l'entrepreneuriat et les politiques sensibles au genre. Les cadres sont alignés sur des initiatives telles que les Perspectives de la science, de la technologie et de l'innovation 2016 de l'OCDE et ONU Femmes. Ces stratégies globales, vitales pour l'éducation du 21e siècle, favorisent la collaboration internationale et soutiennent la préparation d'une main-d'œuvre diversifiée et compétente sur le plan technologique, en ciblant activement les disparités entre les sexes dans les STEM et la robotique spatiale et contribuent ainsi de manière significative à faire progresser le développement inclusif et l'innovation en Afrique.

ALIGNER L'ÉDUCATION SUR LA ROBOTIQUE SPATIALE

Les programmes d'éducation inclusifs en STEM, les initiatives de bourses d'études, l'exposition précoce aux sujets STEM et la promotion de modèles féminins sont essentiels. Les systèmes éducatifs doivent être alignés sur les exigences de l'industrie spatiale, ce qui nécessite d'adapter les programmes d'études pour s'assurer que les diplômés sont bien préparés aux défis et aux opportunités de la robotique spatiale, où la croissance de l'industrie recoupe les objectifs des cadres continentaux.

[...] Les gouvernements, les établissements d'enseignement et l'industrie spatiale devraient collaborer pour mettre en œuvre des politiques et des initiatives qui s'alignent sur les principes de la CESA 16-25, de l'Agenda 2063, des traités de l'UA et de la stratégie GEWE. Ces recommandations devraient être complétées par une collecte de données et des recherches approfondies afin de suivre les progrès accomplis dans l'atteinte des objectifs fixés par ces cadres visionnaires.

[2] *La littératie numérique : la capacité d'un individu à participer à une société qui utilise les technologies de communication numériques dans tous ses domaines d'activité.*

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2026

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ANGLAIS

(Durée de l'épreuve : 1 heure)

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur la feuille de réponses jointe à l'énoncé. **Seule la feuille de réponses devra être rendue en fin d'épreuve.**

Chaque question admet une seule bonne réponse. Chaque bonne réponse est créditée d'un point, chaque mauvaise réponse de 0 point. Il y a en tout 75 questions. La note sera ramenée sur 20.

I. Vocabulaire (20 questions)

Complétez la phrase en sélectionnant le meilleur choix parmi les réponses proposées.

1. The company is looking to hire ________ interns for the summer.
   a. believable
   b. certain
   c. intuitive
   d. reliable

2. Tickets are 50€ with ________ for students, military, and educators.
   a. bonuses
   b. discounts
   c. premiums
   d. surcharges

3. Activists ________ climate change is largely unchecked by the state.
   a. approve
   b. prevent
   c. recommend
   d. warn

4. Three people ________ credit for the same invention.
    a. called
    b. claimed
    c. petitioned
    d. requested

5. The weather service alters citizens to be ________ of the weather changing dramatically.
    a. awake
    b. aware
    c. careful
    d. sensitive

6. Most of us can’t ________ to going without our phones for more than a few waking hours.
    a. commit
    b. concentrate
    c. engage
    d. obey

7. All film shoots were ________ in the city to accommodate the Olympics from June to September.
    a. banned
    b. boycott
    c. defended
    d. released

8. Despite the low-ticket sales, the event went ________ as planned.
    a. above
    b. ahead
    c. onwards
    d. previously

9. The simplest ________ for driving on snowy, icy roads is this: don't.
    a. advice
    b. announcements
    c. caution
    d. opinion

10. The factory’s ________ closure will eliminate six hundred jobs over the course of two years.
    a. gradual
    b. hasty
    c. rare
    d. roughly

11. For ________ to three decades, she's made a mark as a standout news reporter.
    a. clearly
    b. close
    c. nearby
    d. practically

12. The union said workers with perfect attendance ________ recognition.
    a. avoid
    b. deserve
    c. gain
    d. request

13. Breakfast is ________ considered one of the most important meals of the day.
    a. fairly
    b. hardly
    c. mainly
    d. widely

14. The economy has kept growing steadily, and employers have kept hiring at a healthy ________ .
    a. count
    b. method
    c. pace
    d. way

15. As part of the program, the city and homeowners would ________ the renovation costs.
    a. borrow
    b. reduce
    c. slice
    d. split

16. The study was ________ that sunscreen use prevents cancer.
    a. demonstration
    b. paper
    c. proof
    d. record

17. Some people prefer to drink tea, ________ others prefer coffee.
    a. although
    b. therefore
    c. unless
    d. whereas

18. The ________ and scale of recent wildfires in Canada have underscored the challenges of fighting fires in the 21st century.
    a. result
    b. scope
    c. subject
    d. summary

19. Farming makes up the ________ of the country's economy.
    a. bulk
    b. lack
    c. part
    d. piece

20. Due to the cost of living, the poverty ________ has recently been raised by the government.
    a. amount
    b. grade
    c. maximum
    d. threshold

II. Grammaire (30 questions)

Complétez la phrase avec le meilleur choix parmi les réponses proposées.

21. He is ________ person I know.
    a. Happier
    b. the happier
    c. the happiest
    d. the most happy

22. Do you know anyone ________ can teach me how to play piano?
    a. where
    b. which
    c. who
    d. whose

23. The friendly housecat, ________ is grey, belongs to my neighbor.
    a. where
    b. which
    c. who
    d. whose

24. The fruit juice we ________ at the restaurant yesterday was delicious.
    a. did drink
    b. drank
    c. drink
    d. drunk

25. She ________ much too late to catch the bus today.
    a. wakes up
    b. woke up
    c. woked up
    d. woken up

26. My grandmother ________ her glasses on her way to the store this afternoon.
    a. loose
    b. lose
    c. losed
    d. lost

27. Where ________ you ________ on your trip last summer?
    a. did … go
    b. did … went
    c. do … go
    d. do … gone

28. They were disappointed because their team ________ not ________ in the final tournament.
    a. will … play
    b. will … played
    c. will … playing
    d. will … to play

29. Where are you ________ your party?
    a. threw
    b. throw
    c. throwing
    d. thrown

30. I have ________ gone to a music festival.
    a. ever
    b. never
    c. since
    d. yet

31. We have too ________ homework to do, so we can't play games tonight.
    a. few
    b. many
    c. much
    d. some

32. She needs a ________ advice to help her choose the best product.
    a. few
    b. little
    c. many
    d. much

33. Can you lend me some money?
    a. No, we don't have some.
    b. No, we don't have none.
    c. No, we don't have any.
    d. No, we don't have it.

34. The research project will be completed ________ from now until September.
    a. anyhow
    b. anytime
    c. someday
    d. sometimes

35. Do you know ________ to get to the train station?
    a. how
    b. when
    c. where
    d. which

36. I think we would have fewer arguments, if you ________ to what I'm saying a little more.
    a. listen
    b. listened
    c. should listen
    d. would have listened

37. Please let us know if you cannot ________ to the party.
    a. came
    b. come
    c. have come
    d. to come

38. I think he’s addicted to ________ candy.
    a. being eaten
    b. eat
    c. eating
    d. have ate

39. Not for a moment ________ she would be given the award, so she was astonished when she won.
    a. did she think
    b. she did think
    c. she has thought
    d. she thought

40. He said that he ________ some gardening next weekend.
    a. do
    b. does
    c. has done
    d. would do

41. Without ________ your eyes, tell me who is singing.
    a. open
    b. opening
    c. to open
    d. opened

42. The police stepped in front of the man to prevent him ________ injured.
    a. at getting
    b. from getting
    c. in getting
    d. to getting

43. Because the speech was ________, the audience was ________ in what the speaker had to say.
    a. bored … uninterested
    b. bored ... uninteresting
    c. boring … uninterested
    d. boring … uninteresting

44. How long have you played the guitar?
    a. During five years.
    b. Five years ago.
    c. For five years.
    d. Since five years.

45. He ________ to buy a new bicycle since his last birthday.
   a. is saving up
   b. has been saving up
   c. had been saving up
   d. was saving up

46. I will buy you a new jigsaw puzzle as soon as the first one ________.
   a. be completed
   b. is completed
   c. is completing
   d. will be completed

47. No sooner ________ than the legal challenges began.
   a. did the ruling be issued
   b. did the ruling be issuing
   c. was the ruling issued
   d. was the ruling issuing

48. It is believed that the suspect ________ the country before the arrest warrant was issued.
   a. had left
   b. has left
   c. leaves
   d. was leaving

49. She was confessing _________ the money when he interrupted her.
   a. steal
   b. stealing
   c. to steal
   d. to stealing

50. The manager suggested that the CEO ________ more staff to help the company grow.
   a. hire
   b. hired
   c. hires
   d. will hire

III. Compréhension écrite (25 questions)

Répondez à la question en choisissant la meilleure réponse en fonction des informations présentées dans le texte.

Text 1

Digital innovation is transforming how students learn. Schools are increasingly integrating tools like tablets, interactive whiteboards, and online platforms to create dynamic and personalized learning experiences. These resources empower students to explore subjects at their own pace and access a wealth of information beyond traditional classrooms.

Yet, this shift is not without challenges. Unequal access to technology can widen educational disparities, leaving some students at a disadvantage. Additionally, excessive screen time may impact students' well-being, from physical health to their ability to focus.

To maximize the benefits of technology in education, a balanced approach—combining digital tools with traditional teaching methods—can help ensure an inclusive and effective learning environment for every student.

---

51. What is one way technology is changing how students learn?
    a. Teachers are replacing all traditional lessons with video games.
    b. Students must now attend school only online.
    c. Students are no longer allowed to use books in schools.
    d. Schools are using digital tools like tablets and interactive whiteboards.

52. What is a challenge mentioned about using technology in education?
    a. Teachers no longer need to prepare lessons.
    b. All students have equal access to technology.
    c. Too much screen time can affect students' health and attention.
    d. Students prefer traditional books over digital tools.

53. Why might unequal access to technology create problems in education?
    a. It makes schools spend more money on digital tools.
    b. It can lead to gaps in learning opportunities among students.
    c. It forces teachers to use only traditional teaching methods.
    d. It reduces the number of online resources available.

54. What does the text suggest is the best approach to using technology in education?
    a. Replacing all traditional teaching methods with digital tools.
    b. Avoiding technology altogether to protect students' health.
    c. Balancing technology with traditional teaching methods.
    d. Limiting technology use to only advanced students.

55. How does the text present the relationship between technology and traditional teaching methods?
    a. It argues that technology should completely replace traditional methods.
    b. It suggests that traditional methods are outdated and ineffective.
    c. It emphasizes the importance of integrating both to create an effective learning environment.
    d. It claims that students prefer traditional methods over digital tools.

Text 2

Historically, quantitative fields have been male-dominated, but recent initiatives are reshaping this tendency. Schools and educational programs are increasingly prioritizing efforts to encourage young women to explore and pursue mathematics. Research consistently demonstrates that, when given equal support and opportunities, women achieve results on par with their male counterparts.

The influence of teachers and mentors is pivotal. Female role models in mathematics can empower girls by fostering confidence in their abilities. Additionally, creating inclusive classroom environments—where stereotypes are actively challenged—can have a transformative impact on young women's aspirations.

Despite this progress, significant challenges remain. Deep-rooted societal biases and stereotypes continue to deter many young women from pursuing mathematical studies. Tackling these issues demands a collaborative effort from educators, parents, and society at large.

By ensuring equitable opportunities and unwavering support, we can enable women not only to excel in mathematics but also to make meaningful contributions to the advancement of the field.

---

56. What has traditionally characterized the field of mathematics?
    a. Equal participation of men and women
    b. Dominance by women
    c. Exclusion of both men and women
    d. Dominance by men

57. What are schools and educational programs doing to change this trend?
    a. Discouraging young women from studying mathematics
    b. Encouraging young women to pursue mathematics
    c. Focusing only on male students
    d. Removing mathematics from the curriculum

58. What does research show about women's performance in mathematics?
    a. Women perform worse than men, regardless of support
    b. Women perform just as well as men when given the right opportunities
    c. Women are naturally better at mathematics than men
    d. Women are not interested in mathematics

59. Why are female role models important in mathematics, according to the text?
    a. They replace male teachers in schools.
    b. They discourage boys from studying mathematics.
    c. They inspire girls to believe in their mathematical abilities.
    d. They focus only on theoretical mathematics.

60. What is one way inclusive classroom environments can help young women?
    a. By challenging stereotypes and fostering confidence
    b. By reinforcing stereotypes about gender and mathematics
    c. By excluding boys from participating in math activities
    d. By focusing solely on advanced mathematics topics

61. What does the text imply about the role of society in addressing gender disparities in mathematics?
    a. Society should leave educational changes entirely to schools.
    b. Societal biases are irrelevant to women's participation in mathematics.
    c. Only female mathematicians can address these challenges.
    d. Overcoming biases requires collective effort from educators, parents, and society.

Text 3

The European Union (EU) is a staunch defender of human rights, enshrining core freedoms and protections in the EU Charter of Fundamental Rights. This charter guarantees essential rights—such as freedom of expression, access to education, and protection from discrimination—for all citizens.

Central to upholding these rights is the European Court of Human Rights, which allows individuals to seek justice if their rights are violated. This mechanism reinforces accountability and ensures that human rights are respected across all EU member states.

Yet, the EU faces ongoing challenges. Issues like migration, data privacy, and rising nationalism are putting its human rights framework to the test. Tackling these requires sustained collaboration between EU institutions and member states. By staying steadfast in its commitment, the EU can continue to lead globally in advancing justice and equality.

---

62. What is the main purpose of the EU Charter of Fundamental Rights?
    a. To limit freedom of speech in the EU
    b. To guarantee basic freedoms and protections for all EU citizens
    c. To control migration within the EU
    d. To promote nationalism in member states

63. According to the text, how can citizens protect their rights if they are violated in the EU?
    a. By contacting their local mayor
    b. By organizing protests in their country
    c. By appealing to the European Court of Human Rights
    d. By moving to another EU country

64. Which of the following is NOT mentioned as a challenge to the EU's commitment to human rights?
    a. Climate change
    b. Migration
    c. Data protections
    d. Increasing nationalism

65. According to the text, what is required to address the challenges facing the EU's human rights commitments?
    a. Stricter border controls
    b. Reducing the power of the European Court of Human Rights
    c. Ignoring issues related to data privacy
    d. Ongoing efforts from EU institutions and member states

66. How does the European Court of Human Rights contribute to the EU's role as a global leader in human rights?
    a. By enforcing strict penalties on member states
    b. By providing a legal framework through which individuals can seek redress
    c. By focusing solely on economic policies
    d. By limiting the influence of nationalism in Europe

Text 4

In our interconnected world, tolerance is the essential bridge between diversity and collective stability. Instead of enforcing uniformity or accepting division, tolerance allows cultures, religions, and political systems to coexist while pursuing shared objectives.

When embraced, tolerance turns potential conflicts into opportunities. It encourages societies to view differing perspectives not as threats, but as unique approaches shaped by distinct historical and social experiences. This doesn't mean abandoning one's own values—rather, it fosters an understanding of the inherent logic within different worldviews.

Tolerant societies leverage diversity as a catalyst for innovation, drawing from multiple traditions to address complex challenges. Tolerance also strengthens resilience by breaking the dangerous cycle where differences spark fear, fear fuels hostility, and hostility escalates into conflict. Without tolerance, diversity can become a source of division, eroding trust and destabilizing communities and nations. With it, we build a world where differences unite rather than divide us.

---

67. According to the text, how can tolerance be useful in today's world?
    a. To eliminate cultural differences
    b. To connect diversity with collective stability
    c. To impose one dominant culture while respecting others
    d. To encourage communities to isolate themselves

68. According to the text, what does tolerance transform?
    a. Conflicts into opportunities
    b. Religion into culture
    c. Uniformity into homogeneity
    d. Respect into domination

69. What does the phrase "understanding of the inherent logic within different worldviews" mean in the text?
    a. Understanding that different perspectives have their own coherence without giving up one's values
    b. Accepting all cultural practices without question, even if it means abandoning some personal values
    c. Adopting other cultures' values as superior to one's own
    d. Creating a universal set of moral principles for everyone

70. According to the text, what is the relationship between personal values and tolerance?
    a. Tolerance necessitates abandoning their personal values
    b. Personal values outweigh tolerance
    c. Tolerance can coexist with differing personal values
    d. Personal values and tolerance cannot coexist

71. What practical challenge might arise in achieving "a world where differences unite rather than divide us"?
    a. Balancing fundamentally incompatible values without compromising core principles
    b. The total lack of common ground between certain cultures
    c. The superior nature of some cultures over others
    d. The impossibility for different cultures to communicate

---

Text 5

Data science is a multidisciplinary field that combines mathematics, statistics, computer science, and domain-specific knowledge—including quantitative economics—to analyze and interpret complex data. Its primary goal is to uncover hidden patterns, extract meaningful insights, and support decision-making through data-driven strategies. In today's world, where organizations generate massive amounts of data daily, data science plays a crucial role in transforming raw data into actionable information.

Quantitative economics, a key component of data science, uses statistical and mathematical models to analyze economic trends, forecast market behavior, and evaluate policies. By integrating economic theory with data analysis, data scientists can address challenges like pricing strategies, risk assessment, and resource allocation.

A range of tools and techniques, including programming languages like Python and R, data visualization tools, machine learning algorithms, and cloud computing platforms are used by data scientists. Their work involves collecting, cleaning, and transforming data, followed by exploratory analysis, model development, and presenting results through reports or interactive dashboards.

The applications of data science are vast and varied. It is used to predict consumer behavior in marketing, detect fraud in finance, personalize healthcare treatments, optimize logistics and supply chains, and even analyze economic policies. Additionally, data science is a key driver in the development of artificial intelligence.

The demand for skilled data scientists is growing, as their ability to turn data into strategic insights makes them essential contributors to innovation, efficiency, and competitive advantage in today's data-driven world.

---

72. What do data scientists do with raw data?
    a. They delete it
    b. They use it without any changes
    c. They clean, organize, and analyze it
    d. They make forecasts

73. Which of the following is a tool commonly used by data scientists?
    a. Dashboards and steering wheels
    b. Clouds and lightning
    c. Programming languages like Python and R
    d. Library books and magazines

74. Which of the following is NOT mentioned as an application of data science?
    a. Predicting customer behavior
    b. Building warehouses
    c. Detecting fraud
    d. Analyzing economic policies

75. Why is data science important for businesses and states today?
    a. It is a popular trend
    b. It replaces customer service
    c. It helps businesses and nations make better, data-driven decisions
    d. It makes customers more insightful